

EPREUVE DES PETITES MINES, MPSI, 1998

EXTRAIT

Deuxième problème

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $t + \sin t = 0$.
2. Pour tout réel t tel que $t + \sin t \neq 0$, on pose :

$$\psi(t) = \frac{1}{t + \sin t}$$

Montrer que l'intégrale

$$\int_x^{2x} \psi(t) \, dt$$

est définie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. On notera $f(x)$ sa valeur.

L'objet de ce problème est l'étude de la fonction f associée, définie sur $\mathbb{R}^*$.

3. Soit $x_0 > 0$. La fonction, ψ est-elle intégrable sur $]0, x_0]$?
4. Étudier la parité de f .
5. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$, et calculer $f'(x)$ sous forme factorisée pour $x > 0$.
6. En déduire le sens de variation de f sur $]0, +\infty[$.
7. On cherche à étudier le comportement de f au voisinage de $+\infty$.
 - (a) Montrer que, pour tout $x > 0$

$$\left| f(x) - \int_x^{2x} \frac{dt}{t} \right| \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{t(t + \sin t)}$$

- (b) Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que, pour tout $t \geq m$, on ait $t + \sin t \geq \frac{t}{2}$.
 - (c) En déduire que $f(x)$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$.
8. On cherche à étudier le comportement de f au voisinage de 0.

- (a) Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que

$$\frac{1}{t + \sin t} = \frac{a}{t} + bt + o_{t \rightarrow 0}(t)$$

- (b) Soit g une fonction de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$g(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{ } 0$$

Montrer que

$$\sup_{t \in [x, 2x]} |g(t)| \xrightarrow[x \rightarrow 0^+]{ } 0$$

- (c) En déduire que si h est une fonction continue de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$h(x) = o_{x \rightarrow 0}(x)$$

alors

$$\int_x^{2x} h(t) \, dt = o_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

- (d) Montrer que f admet au voisinage de 0 un développement limité à l'ordre 2 que l'on déterminera.
 - (e) Montrer que f peut se prolonger en 0 en une fonction dérivable (on notera encore f ce prolongement), et déterminer $f(0)$ et $f'(0)$.
 - (f) Quelle est, au voisinage de 0, la position de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0 ?
 - (g) Déterminer un équivalent simple de $f'(x)$ au voisinage de 0.
 - (h) En déduire que f est deux fois dérivable en 0, et calculer $f''(0)$.
9. Déterminer le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

FIN EXTRAIT

