

CONCOURS 1997

DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Epreuve spécifique de Mathématiques

Classements SUP (MPSI, PCSI, PTSI) et SPE (MP, PC, PT, PSI)

EXTRAIT

DEUXIEME PROBLEME

Dans tout ce problème, $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres entiers naturels, et $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Partie A

On considère l'équation différentielle : $y' + 2xy = 1$.

1. De quel type d'équation différentielle s'agit-il ?

On désigne désormais par f l'une de ses solutions sur $\mathbb{R}$, **que l'on ne cherchera pas à exprimer pour l'instant.**

2. (a) Prouver que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

(b) Quelle est la valeur de $f'(0)$?

3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n+2)}(x) = -2xf^{(n+1)}(x) - 2(n+1)f^{(n)}(x)$.

4. (a) Montrer que f admet en 0 un développement limité à tout ordre p (p entier naturel). Écrivons un tel développement limité au moyen d'une suite de réels $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^p a_k x^k + o(x^p).$$

(b) A l'aide du résultat de la question 3, montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, a_{2k+1} = \frac{(-4)^k \cdot k!}{(2k+1)!}$.

(c) Obtenir également l'expression des termes a_{2k} à l'aide de $f(0)$ (k entier naturel).

FIN EXTRAIT

