Petites Mines 2003

Problème

Partie A

Notons E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $\mathbf{D} : f \in \mathrm{E} \mapsto f'$. Il est clair que $\mathbf{D}$ est un endomorphisme de E.

1. – Déterminez le noyau et l'image de $\mathbf{D}$.

Soient $f_1 : t \in \mathbb{R} \mapsto e^t$, $f_2 : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-t/2}\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)$ et $f_3 : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-t/2}\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)$. Nous noterons $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ et G le sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathcal{B}$.

Nous allons montrer que $\mathcal{B}$ est une famille libre de vecteurs de E. Soient a, b et c des réels tels que $af_1 + bf_2 + cf_3$ soit la fonction nulle.

2. – L'étudiante A observe que $af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t) = 0$ pour tout réel t. Elle choisit (adroitement) trois valeurs de t, obtient un système de trois équations aux trois inconnues a, b et c, qu'elle résout ; il ne lui reste plus qu'à conclure. Faites comme elle !

3. – L'étudiant B propose d'exploiter le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $af_1 + bf_2 + cf_3$ au voisinage de 0. Faites comme lui !

4. – L'étudiante C décide de s'intéresser au comportement de $af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$. Faites comme elle !

La famille $\mathcal{B}$ est donc une base de G, et ce sous-espace est de dimension 3.

5. – Montrez que G est stable par $\mathbf{D}$.

Nous noterons $\widehat{\mathbf{D}}$ l'endomorphisme de G induit par $\mathbf{D}$.

6. – Déterminez la matrice M de $\widehat{\mathbf{D}}$ dans la base $\mathcal{B}$.

7. – Calculez M^3.

8. – Montrez que M est inversible, et explicitez son inverse M^{-1}.

9. – Montrez que $\widehat{\mathbf{D}}$ est un automorphisme de G.

10. – Exprimez $(\widehat{\mathbf{D}})^{-1}$ en fonction de $\widehat{\mathbf{D}}$.

Partie B

Nous nous intéressons dans cette partie à l'équation différentielle $y''' = y$, que nous noterons $(\mathcal{E})$. Une solution sur $\mathbb{R}$ de $(\mathcal{E})$ est une fonction f définie et trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant $f'''(t) = f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

11. – Montrez que toute solution f de $(\mathcal{E})$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

12. – Montrez que la fonction nulle est la seule solution polynomiale de $(\mathcal{E})$.

Notons $\mathbf{T} = \mathbf{D}^3 - \mathbf{Id}$, où $\mathbf{Id}$ est l'identité de E, et $\mathbf{D}^3 = \mathbf{D} \circ \mathbf{D} \circ \mathbf{D}$. Le noyau de $\mathbf{T}$ est donc l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$.

13. – Montrez que G est contenu dans le noyau de $\mathbf{T}$.

Nous allons établir l'inclusion inverse ; ainsi, G sera exactement l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$. Soit f une solution de $(\mathcal{E})$; nous noterons $g = f'' + f' + f$.

14. – Montrez que g est solution de l'équation différentielle $y' = y$.

15. – Décrivez rapidement l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' - y = 0$.

16. – Résolvez l'équation différentielle $y'' + y' + y = 0$; vous donnerez une base de l'ensemble des solutions.

17. – Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Décrivez l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + y' + y = \lambda e^t$.

18. – Et maintenant, concluez !

Fin énoncé