Correction

d'après Mines de Sup 1998 épreuve commune

Partie I

1. $\det s = \det S = \dfrac{1}{27}\begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{27}\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{27}\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 4$.

Puisque $\det s \neq 0$, s est un automorphisme.

2.a $\det_{(e_1,e_2,e_3)}\left(e_1',e_2',e_3'\right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$ donc $\left(e_1',e_2',e_3'\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2.b $s(e_1') = e_1'$, $s(e_2') = 2e_2'$ et $s(e_3') = 2e_3'$ donc $S' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2.c Par récurrence : $(S')^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

En introduisant P la matrice de passage de (e_1,e_2,e_3) à $\left(e_1',e_2',e_3'\right)$, on a $S = PS'P^{-1}$ puis $S^n = PS'^nP^{-1}$ ce qui permet d'exprimer S^n.

3.a Si $\lambda I_3 + \mu S = O$ alors $\begin{cases} \lambda + \dfrac{5}{3}\mu = 0 \\ -\dfrac{1}{3}\mu = 0 \end{cases}$ donc $\lambda = \mu = 0$. La famille (I_3,S) est libre.

3.b $S^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 3S - 2I_3$.

3.c Unicité : Si $S^n = aI_3 + bS = \alpha I_3 + \beta S$ alors $(a-\alpha)I_3 + (b-\beta)S = O$ or (I_3,S) libre donc $\begin{cases} a = \alpha \\ b = \beta \end{cases}$.

Existence : Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:
Pour $n = 0$: $a_0 = 1$, $b_0 = 0$.
Pour $n = 1$: $a_1 = 0$, $b_1 = 0$.
Supposons la propriété établie au rang $n \geq 1$.
$S^{n+1} = S^n \times S = (a_nI_3 + b_nS)S = a_nS + b_nS^2 = (a_n + 3b_n)S - 2b_nI_3$.
En posant $a_{n+1} = -2b_n$ et $b_{n+1} = a_n + 3b_n$, on a $S^{n+1} = a_{n+1}I_3 + b_{n+1}S$.
Récurrence établie.

3.d Ci-dessus

3.e $a_{n+1} + b_{n+1} = -2b_n + a_n + 3b_n = a_n + b_n$ donc $(a_n + b_n)$ constante égale à $a_0 + b_0 = 1$.
$b_{n+1} + 1 = a_n + 3b_n + 1 = (a_n + b_n) + 2b_n + 1 = 2(b_n + 1)$ donc $(b_n + 1)$ est géométrique de raison 2.

3.f $b_0 = 0$ donc $b_n = 2^n - 1$ puis $a_n = 1 - b_n = 2 - 2^n$.

4.a $B = -\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B^2 = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B^3 = -\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,...

Par récurrence : $B^n = \dfrac{(-1)^n}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ pour $n \geq 1$. $B^0 = I_3$.

4.b $S^n=(B+2I_3)^n$ or B et I_3 commutent donc $S^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}B^k=2^nI_3+\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}(-1)^k\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.

Mais $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}(-1)^k=(2+(-1))^n-2^n=1-2^n$ donc $S^n=2^nI_3+\frac{1-2^n}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.

4.c $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=2I_3-S$ donc

$2^nI_3+\frac{1-2^n}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=2^nI_3+(2-2^{n+1})I_3-(1-2^n)S=(2-2^n)I_3+(2^n-1)S$.

Les résultats sont identiques.

Partie II

1. $S^2=3S-2I_3$ donc $S(\frac{3}{2}I_2-\frac{1}{2}S)=I_3$ puis $S^{-1}=\frac{1}{2}S-\frac{3}{2}I_3=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{pmatrix}$ donc $U=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$.

$U\in O(3)$ car les colonnes de U sont unitaires et deux à deux orthogonales.

$\det U=1$ donc $U\in O^+(3)$ et par suite u est une rotation vectorielle.

Par définition $US=A$ et par calculs $SU=A$ donc $u\circ s=s\circ u=f$.

2.a (1) $(e_1''|e_2'')=0$ car $(e_1'|e_2')=0$, $\|e_1''\|=\|e_2''\|=1$ et $e_3=e_1\wedge e_2$ donc (e_1'',e_2'',e_3'') est une base orthonormée directe.

(2) $(e_1''|e_2'')=(e_2''|e_3'')=(e_3''|e_1'')=0$, $\|e_1''\|=\|e_2''\|=\|e_3''\|=1$ et $\mathrm{Det}(e_1'',e_2'',e_3'')>0$ donc (e_1'',e_2'',e_3'') est une base orthonormée directe.

2.b $u(e_1'')=e_1''$, $u(e_2'')=(0,\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2})=-\frac{1}{2}e_2''+\frac{\sqrt3}{2}e_3''$, $u(e_3'')=(\frac{-2}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6})=-\frac{\sqrt3}{2}e_2''-\frac{1}{2}e_3''$

donc $U'=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt3}{2}\\0&\frac{\sqrt3}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$ avec $\theta=\frac{2\pi}{3}$.

u est la rotation d'axe dirigé et orienté par e_1'' et d'angle $2\pi/3$.

3.a C'est la matrice S'.

3.b $\mathrm{Mat}_{(e_1'',e_2'',e_3'')}(f)=S'U'=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&-\sqrt3\\0&\sqrt3&-1\end{pmatrix}$.

4.b.i $f(e_2''),f(e_3'')\in\mathrm{Vect}(e_2'',e_3'')$ donc $f(P)\subset P$.

De plus, f est bijective donc $\dim f(P)=\dim P$ puis $f(P)=P$.

4.b.ii $\mathrm{Mat}_{(e_2'',e_3'')}=2\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$ donc g est la composée de l'homothétie vectorielle de rapport 2 et de la rotation d'angle $2\pi/3$ (dans P orienté par e_1'').