

Extrait-Centrale-2021-MP

MP

Intégrales dép d'un paramètre ...

II Inégalités de Bernstein et transformée de Fourier

Dans cette partie,

— pour $k \in \mathbb{N}$, on dit qu'une fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{C} est de classe \mathcal{C}^k si elle est k fois dérivable sur \mathbb{R} , de dérivée k -ième continue sur \mathbb{R} (si $k = 0$, f est continue) ; on dit que f est \mathcal{C}^∞ si f est \mathcal{C}^k pour tout $k \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$) l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^k (respectivement \mathcal{C}^∞) sur \mathbb{R} ;

— on note $L^1(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{C} continues et intégrables sur \mathbb{R} ;

— pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on note $\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$;

— on note $L^\infty(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{C} continues et bornées sur \mathbb{R} ;

— pour $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, on note $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$.

On admet que $L^1(\mathbb{R})$, $L^\infty(\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ ($k \in \mathbb{N}$) sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$. On admet également que $f \mapsto \|f\|_1$ définit une norme sur $L^1(\mathbb{R})$ et que $f \mapsto \|f\|_\infty$ définit une norme sur $L^\infty(\mathbb{R})$. On dispose ainsi des espaces vectoriels normés $(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ et $(L^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

II.A – Transformée de Fourier d'une fonction

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On appelle transformée de Fourier de f et on note \hat{f} la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{C} telle que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx.$$

Q 20. Montrer que, pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$, \hat{f} est définie et continue sur \mathbb{R} .

Q 21. Montrer que l'application $f \mapsto \hat{f}$ est une application linéaire continue de l'espace vectoriel normé $(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ dans l'espace vectoriel normé $(L^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Q 22. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et soit g la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{C} telle que $g(x) = f(\lambda x)$ pour tout réel x . Montrer que $g \in L^1(\mathbb{R})$ et, pour tout réel ξ , exprimer $\hat{g}(\xi)$ à l'aide de \hat{f} , de ξ et de λ .

II.B – Produit de convolution

Si f et g sont deux fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{C} telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(t)g(x-t)$ soit intégrable sur \mathbb{R} , on appelle produit de convolution de f et g , et on note $f * g$, la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{C} telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t) dt.$$

On suppose désormais et jusqu'à la fin de la sous-partie II.B que $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Q 23. Montrer que $f * g$ est définie sur \mathbb{R} et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t) dt = (g * f)(x).$$

Q 24. Montrer que $f * g$ est bornée et que $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$.

Q 25. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que, si g est de classe \mathcal{C}^k et si les fonctions $g^{(j)}$ sont bornées pour $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$, alors $f * g$ est de classe \mathcal{C}^k et $(f * g)^{(k)} = f * (g^{(k)})$.

Q 26. On suppose toujours que $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ et on suppose de plus que $g \in L^1(\mathbb{R})$ et $f * g \in L^1(\mathbb{R})$. En admettant que, pour tout ξ réel,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} f(t)g(x-t) dt \right) dx \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} f(t)g(x-t) dx \right) dt$$

existent et sont égales, montrer que $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$.

II.C – Introduction d'une fonction plateau

On cherche dans cette sous-partie à construire une fonction réelle positive ρ , définie et de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , telle que $\rho(t) = 1$ pour tout $t \in [-1, 1]$ et $\rho(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus [-2, 2]$.

Soit φ la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0, \\ e^{-1/t} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Q 27. Montrer que φ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

On pourra montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, \exists P_k \in \mathbb{R}[X], \forall t > 0, \varphi^{(k)}(t) = P_k(1/t)e^{-1/t}$.

Soit ψ la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \psi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin]-1, 1[, \\ e^{1/(t^2-1)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Q 28. Montrer, en l'exprimant à l'aide de φ , que ψ est de classe \mathcal{C}^∞ .

Q 29. Soit θ l'unique primitive de ψ s'annulant en 0. Montrer que θ est de classe \mathcal{C}^∞ , constante sur $]-\infty, -1]$ (on note A cette constante) et constante sur $[1, +\infty[$ (on note B cette constante). Vérifier que $A \neq B$.

Q 30. Construire alors une fonction $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, constante égale à 1 sur $[-1, 1]$ et constante égale à 0 sur $\mathbb{R} \setminus [-2, 2]$.

II.D – Inégalités de Bernstein

On admet les formules suivantes, dites formules d'inversion de Fourier :

— si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et si $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} \hat{f}(\xi) d\xi$;

— si $\alpha \in L^1(\mathbb{R})$, si a est la fonction de \mathbb{R} dans $\mathbb{C} : x \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} \alpha(\xi) d\xi$, et si $a \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\alpha = \hat{a}$.

On remarque que ces résultats permettent d'affirmer que, si f et g sont deux fonctions continues telles que f, g, \hat{f} et \hat{g} sont intégrables et si $\hat{f} = \hat{g}$, alors $f = g$.

On considère toujours la fonction ρ définie à la question 30.

Soit r la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{C} telle que, pour tout réel x ,

$$r(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} \rho(\xi) d\xi.$$

Q 31. Montrer que r est dérivable sur \mathbb{R} et donner une expression de sa fonction dérivée (faisant éventuellement intervenir une intégrale).

Q 32. Montrer que $x \mapsto x^2 r(x)$ est bornée sur \mathbb{R} et en déduire que r est intégrable et bornée sur \mathbb{R} .

On admet qu'en utilisant la même méthode, on montre que r' est intégrable et bornée sur \mathbb{R} .

Soit $\lambda > 0$ et soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ et telle que \hat{f} soit nulle en dehors du segment $[-\lambda, \lambda]$. On note r_λ la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{C} telle que $r_\lambda(x) = r(\lambda x)$ pour tout réel x .

Q 33. On admet que $f * r_\lambda$ est intégrable. Montrer que $f = \lambda f * r_\lambda$.

Q 34. En déduire que, si $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+^*$, indépendante de λ et de f , telle que

$$\|f'\|_\infty \leq C\lambda \|f\|_\infty.$$

Fin extrait

