

Concours National Commun¹

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES 2

Session 2025 - Filière MP

L'usage de tout matériel électronique, y compris la calculatrice, est interdit.

Le sujet de cette épreuve est composé d'un exercice et d'un problème indépendants entre eux.

Durée : 4 heures

EXERCICE

(Noté 4 points sur 20)

On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Soient u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, on pose $\text{Vect}(u, v)$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par u et v .

1. On pose $f_1 = (1, 1, 1)$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$.
 - a) Déterminer deux vecteurs f_2 et f_3 de $\mathbb{R}^3$ tels que $F = \text{Vect}(f_2, f_3)$, avec $f_2 = (a, 0, b)$ et $f_3 = (0, c, d)$, où a, b, c et d sont à déterminer.
 - b) Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
- 2.a) Vérifier que $A^2 - 3A + 2I_3 = O_3$, avec $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice nulle.
 - b) En déduire que A est inversible et déterminer son inverse A^{-1} .
- 3.a) Déterminer les deux réels α et β tels que : $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$ et $A \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ d \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ d \end{pmatrix}$, où a, b, c et d sont les réels trouvés dans la question 1. a).
 - b) Montrer qu'il existe une matrice diagonale D et une matrice P inversible, qui sont à déterminer, telles que $A = PDP^{-1}$.
 - c) Montrer, par récurrence sur n , que pour tout entier naturel n , $A^n = PD^nP^{-1}$.

1. Tous mes corrigés sont disponibles ici <https://tinyurl.com/4up84xze>

PROBLÈME

On désigne par n un entier naturel non nul et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$, I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ désigne l'espace vectoriel réel des matrices colonnes à n lignes.

Pour une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on désigne par $\chi_M(X) = \det(XI_n - M)$ le polynôme caractéristique de M .

On note $M^\top$ la matrice transposée de la matrice M et $\text{Tr}(M)$ la trace de la matrice carrée M .

On rappelle que pour toute matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\text{Tr}(M) = \sum_{i=1}^n m_{ii}$.

On note $\text{Diag}(a_1, \dots, a_n)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui admet pour coefficients diagonaux les réels $a_1, \dots, a_n$ dans cet ordre. On désigne par $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire $\forall S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), S^\top = S$.

On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices S de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que, $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^\top S X \geq 0$.

$\mathbb{R}^+$ désigne l'ensemble des réels positifs et $\mathbb{R}^{*+}$ désigne l'ensemble des réels strictement positifs.

Le problème traite des propriétés et des applications qui sont autour de la notion de trace.

PARTIE 1

Préliminaires

1. Montrer que l'application $\text{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, M \mapsto \text{Tr}(M)$, est linéaire.
2. Soient $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $N = (n_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - a) Montrer que $\text{Tr}(MN) = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n m_{l,k} n_{k,l}$.
 - b) Montrer que $\text{Tr}(MN) = \text{Tr}(NM)$.
 - c) Montrer que si M et N sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $\text{Tr}(M) = \text{Tr}(N)$.
3. On considère l'ensemble $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M \text{ est diagonale et } \text{Tr}(M) = 0\}$.
 - a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - b) Déterminer la dimension de F .
 - c) En déduire que, pour toute matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la dimension du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $G = PFP^{-1} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M = PDP^{-1} \text{ et } D \in F\}$.
4. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'application,

$$\Phi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad ; \quad X \mapsto X + \text{Tr}(X).A$$

- a) Vérifier que Φ_A est une application linéaire.

Soit B une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'équation matricielle :

$$(*) \quad \Phi_A(X) = B$$

- b) On suppose dans cette question que $\text{Tr}(A) \neq -1$.
 - i) On suppose que M est une solution de l'équation matricielle (*). Déterminer $\text{Tr}(M)$ en fonction de $\text{Tr}(A)$ et de $\text{Tr}(B)$.
 - ii) Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation matricielle (*).
 - iii) En déduire que Φ_A est un automorphisme d'espaces vectoriels.
- c) On suppose maintenant que $\text{Tr}(A) = -1$.

- i) Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, selon les valeurs de $\text{Tr}(B)$, l'équation matricielle $(*)$.
- ii) Montrer que Φ_A est un projecteur sur un sous-espace vectoriel F_1 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ parallèlement à un sous-espace vectoriel F_2 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, déterminer F_1 et F_2 .

PARTIE 2

La valeur absolue de la trace comme étant une "fonction génératrice"

Dans cette partie, on note $\mathcal{E} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On rappelle que $\mathcal{E}$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n^2 et que sa base canonique est $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, où pour tous entiers i et j tels que $1 \leq i, j \leq n$, $E_{i,j}$ désigne la matrice de $\mathcal{E}$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne qui est égal à 1. Pour tous entiers h et k tels que

$1 \leq h, k \leq n$, on désigne par $\delta_{h,k}$ le symbole de Kronecker qui est défini par $\delta_{h,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } h = k \\ 0 & \text{si } h \neq k \end{cases}$.

On rappelle que pour tous entiers naturels i, j, k, l tels que $1 \leq i, j, k, l \leq n$, $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$. Une application q de $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}^+$ est dite semi-norme sur $\mathcal{E}$, si elle vérifie :

- $\forall M \in \mathcal{E}, \forall \lambda \in \mathbb{K}, q(\lambda M) = |\lambda|q(M)$.
- $\forall (M, N) \in \mathcal{E}^2, q(M + N) \leq q(M) + q(N)$.

On dit qu'une semi-norme q sur $\mathcal{E}$ vérifie la propriété $(\mathcal{P})$ si $\forall (M, N) \in \mathcal{E}^2, q(MN) = q(NM)$.

1. Soit q une semi-norme sur $\mathcal{E}$.
 - a) Montrer que $q(O_n) = 0$, où O_n est la matrice nulle de $\mathcal{E}$, et que pour tout M de $\mathcal{E}$, $q(-M) = q(M)$.
 - b) Montrer que pour tout (M, N) de $\mathcal{E}^2$, $|q(M) - q(N)| \leq q(M + N)$.
 - c) Montrer que pour tout (M, N) de $\mathcal{E}^2$, si $q(N) = 0$ alors $q(M + N) = q(M)$.
2. On considère l'application f définie de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}^+$ par $f(M) = |\text{Tr}(M)|$. Montrer que f est une semi-norme sur $\mathcal{E}$ qui vérifie la propriété $(\mathcal{P})$.

Dans les questions 3. et 4. de cette partie, on suppose que $n \geq 2$.

3. Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ et soient A et B deux matrices de $\mathcal{E}$ telles que,

$$A = \sum_{j=1}^n E_{1,j} + \sum_{i=2}^n E_{i,i} \quad \text{et} \quad B = \sum_{h=1}^n \alpha_h E_{h,1}$$

- a) Montrer que $AB = \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \right) E_{1,1} + \sum_{i=2}^n \alpha_i E_{i,1}$.
 - b) Montrer que $BA = \sum_{h=1}^n \left(\alpha_h \sum_{j=1}^n E_{h,j} \right)$.
4. Soit q une semi-norme sur $\mathcal{E}$ qui vérifie la propriété $(\mathcal{P})$.
Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ un élément de $\mathcal{E}$.
 - a) Montrer que pour tous entiers distincts i et j tels que $1 \leq i, j \leq n$, $q(E_{i,j}) = 0$, (on pourra utiliser le fait que $E_{i,j} = E_{i,i}E_{i,j}$).
 - b) En déduire que $q\left(\sum_{i=2}^n m_{i,1}E_{i,1}\right) = 0$.
 - c) Vérifier que $q(M) = q\left(\sum_{i=1}^n m_{i,i}E_{i,i}\right)$.
 - d) Montrer, en prenant des valeurs précises pour $(\alpha_k)_{1 \leq k \leq n}$ qui définissent la matrice B , que $q(M) = q(BA)$.
 - e) Montrer qu'il existe un réel positif α tel que $q = \alpha f$.
 5. Dans le cas où $n = 1$, le résultat démontré ci-dessus reste-t-il valable ? justifier votre réponse.

PARTIE 3

Caractérisation d'une matrice de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ par la notion de trace

$\mathcal{O}(n)$ désigne le groupe des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M^\top M = I_n$.

1. On considère une matrice S de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
 - a) Soit la matrice $D = \text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ telle que pour tout entier k , $1 \leq k \leq n$, λ_k sont des réels positifs. Soit $U = (u_{k,j})_{1 \leq k,j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{O}(n)$.
 - i) Montrer que pour tous entiers k et i , $1 \leq k, i \leq n$, $|u_{k,i}| \leq 1$.
 - ii) Vérifier que $DU = (\lambda_k u_{k,j})_{1 \leq k,j \leq n}$.
 - iii) En déduire que $\text{Tr}(DU) \leq \text{Tr}(D)$.
 - b) Soit U une matrice de $\mathcal{O}(n)$.
 - i) Montrer qu'il existe une matrice P de $\mathcal{O}(n)$ et une matrice $D = \text{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, avec pour tout entier i , $1 \leq i \leq n$, α_i sont des réels positifs et $S = P.D.^t P$.
 - ii) Montrer, en posant $V = P^\top U P$, que $SU = P(DV)P^\top$.
 - iii) En déduire que $\text{Tr}(SU) \leq \text{Tr}(S)$.
2. Réciproquement, soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que,

$$\forall U \in \mathcal{O}(n) \quad \text{Tr}(AU) \leq \text{Tr}(A)$$

- a)
 - i) Montrer que, pour tous réels a, b, α , il existe un réel φ tel que, $a \cos \alpha + b \sin \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \varphi)$.
 - ii) En déduire que, si pour tout réel α , $a \cos \alpha + b \sin \alpha \leq a$ alors $b = 0$.
- b) Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ pour son produit scalaire usuel. On note, pour tous entiers p et q tels que $1 \leq p < q \leq n$, $\Pi_{p,q}$ le plan engendré par la famille (e_p, e_q) . On considère $u_{p,q}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que la restriction de $u_{p,q}$ sur $\Pi_{p,q}$ est la rotation du plan $\Pi_{p,q}$ d'angle α et la restriction de $u_{p,q}$ sur l'orthogonal de $\Pi_{p,q}$ est l'application identité de l'orthogonal de $\Pi_{p,q}$.
 - i) Écrire la matrice $U_{1,2}$ de $u_{1,2}$ relativement à la base $\mathcal{B}$ et montrer que $U_{1,2}$ est une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - ii) Calculer $\text{Tr}(AU_{1,2})$ en fonction de $a_{1,2}$, $a_{2,1}$, $(a_{i,i})_{1 \leq i \leq n}$ et de α .
 - iii) En déduire que $a_{1,2} = a_{2,1}$.
 - iv) Écrire, dans le cas général, la matrice $U_{p,q}$ de $u_{p,q}$ relativement à la base $\mathcal{B}$.
 - v) Calculer, dans le cas général, $\text{Tr}(AU_{p,q})$ en fonction de $a_{p,q}$, $a_{q,p}$, $(a_{i,i})_{1 \leq i \leq n}$ et de α .
 - vi) En déduire que A est une matrice symétrique.
- c)
 - i) Justifier qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{V} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de l'endomorphisme g canoniquement associée à la matrice A .
Pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, on note γ_i la valeur propre de g associée au vecteur propre v_i .
 - ii) Soit j un entier tel que $1 \leq j \leq n$. On considère l'endomorphisme w_j de $\mathbb{R}^n$ défini par $w_j(v_j) = -v_j$ et pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$ et $k \neq j$, $w_j(v_k) = v_k$.
Soit W_j la matrice de l'endomorphisme w_j relativement à la base $\mathcal{B}$.
Vérifier que W_j est une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer $\text{Tr}(AW_j)$ en fonction de $\text{Tr}(A)$ et de γ_j . En déduire que $\gamma_j \geq 0$.
- d) En déduire que $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

FIN DE L'ÉPREUVE