Programme de mathématiques de la classe préparatoire ECS1

1 Préambule

1.1 Objectifs généraux de formation

Dans le monde de l'économie et de la gestion, le recours au formalisme, aux concepts et aux calculs mathématiques est permanent ; l'usage systématique des mathématiques dans la communication, l'information et comme outils d'aide à la prévision et à la décision est indispensable ; leur rôle dans les domaines de la finance ou de la gestion d'entreprise, de la finance de marché et des sciences sociales est important.

L'enseignement des probabilités et statistiques fournit un modèle mathématique prenant en compte l'aspect aléatoire d'un phénomène ; il permet de ce fait d'aborder des situations réelles où le hasard intervient. C'est ainsi que cette branche des mathématiques intervient dans tous les secteurs de l'économie et dans une grande variété de contextes (actuariat, biologie, épidémiologie, finance quantitative, prévision économique, etc.) où la modélisation de phénomènes aléatoires à partir de bases de données est indispensable.

L'objectif principal du programme de mathématiques dans la filière Économique et Comerciale, option Scientifique, (ECS) est de fournir aux élèves les outils nécessaires à la compréhension des modèles mathématiques employés en sciences économiques et en gestion. Ces outils sont présentés sur des exemples illustrant leur intérêt.

Une fonction fondamentale de l'enseignement des mathématiques dans ces classes est de structurer la pensée des élèves et de les former à la rigueur et à la logique en insistant sur les divers types de raisonnement (par implication directe ou par équivalence, par contraposée, par l'absurde, par analyse-synthèse, par récurrence, etc.). La démonstration mathématique nécessitant des calculs laborieux ou présentant des difficultés techniques ou conceptuelles est laissée au profits d'exemples et d'illustrations graphiques ou numériques par simulation sur ordinateur. Il ne s'agit donc ni d'un recueil de recettes utiles ni d'un cours sur les fondements de mathématiques générales.

Pour réaliser ces objectifs, les élèves sont entraînés à faire des raisonnements déductifs simples utilisant un vocabulaire claire et précis, un formalisme mathématique correct et une rigueur dans la conduite des raisonnements. Certes les futurs lauréats de la voie scientifique ne feront pas des concepteurs d'outils liés aux calculs économiques et de gestion mais ils devront être capables d'apporter un regard critique sur les hypothèses sur les quels reposent ces outils, de comprendre les concepts qui entrent en jeu et de communiquer avec des mathématiciens professionnels dans le cadre de leur futur métier.

Si les mathématiques sont un outil puissant de modélisation, que l'élève doit maîtriser, elles sont parfois plus contraignantes lorsqu'il sagit d'en extraire une solution. L'évolution des techniques permet désormais d'utiliser aussi l'approche numérique afin de faire porter prioritairement l'attention des élèves sur l'interprétation et la discussion des résultats plutôt que sur une technique d'obtention. Cette approche permet en outre une modélisation plus fine du monde réel, par exemple par la prise en compte d'effets non linéaires ou l'étude de situations complexes hors de portée des techniques traditionnelles. C'est aussi l'occasion pour l'élève d'exploiter les compétences acquises en informatique. C'est enfin l'opportunité de mener avec les professeurs d'informatrique, d'économie et de gestion d'éventuelles démarches collaboratives.

Le programme vise aussi le développement des capacités d'expression et de communication des élèves ; cela suppose, à l'écrit, la capacité à comprendre les énoncés mathématiques, à mettre au point un raisonnement et à rédiger une démonstration et, à l'oral, celle de présenter de manière claire et synthétique une démarche ou une production mathématique. Les travaux individuels ou en équipe proposés aux élèves en dehors du temps d'enseignement (devoirs libres, interrogations orales, comptes rendus de travaux dirigés ou d'interrogations orales, etc.) contribuent de manière efficace à développer ces compétences. La communication utilise des moyens diversifiés auxquels il convient de familiariser les élèves : cela concerne non seulement le tableau, dont la maîtrise est un élément essentiel, mais aussi les dispositifs de projection appropriés (rétroprojecteur, vidéoprojecteur) et l'outil informatique.

1.2 Organisation du texte du programme

Le programme de la classe de première année ECS est présenté en deux parties, chacune d'elles correspondant à une période. Chacune de ces parties définit un corpus de connaissances requises et de capacités attendues.

Le programme définit les objectifs de l'enseignement et décrit les connaissances et les capacités exigibles des élèves ; il précise aussi certains points de terminologie, certaines notations ainsi que des limites à respecter. À l'intérieur de chaque période, le programme est décliné en chapitres (numérotées 1, 2, . . .). Chaque chapitre comporte un bandeau et un texte présenté en deux colonnes : à gauche figurent les contenus du programme et à droite les commentaires.

- le bandeau définit les objectifs essentiels, délimite le cadre d'étude des notions qui lui sont relatives. Il décrit parfois sommairement les notions qui y sont étudiées ;
- les contenus fixent les connaissances, les résultats et les méthodes figurant au programme ;
- les commentaires donnent des informations sur les capacités attendues des élèves. Ils indiquent des repères et proposent des notations. Ils précisent le sens ou les limites de certaines notions ; les énoncés de certaines définitions ou de certains résultats sont parfois intégralement explicités, l'objectif étant ici d'unifier les pratiques des enseignants.

La chronologie retenue dans la présentation des différents chapitres de chaque période ne doit pas être interprétée comme un modèle de progression. Cependant, la progression retenue par chaque professeur au cours de chaque période doit respecter les objectifs de l'enseignement dispensé au cours de cette période.

1.3 Contenu du programme

Le programme définit un socle de connaissances et de capacités, conçu pour être accessible à tous les élèves, en organisant de façon progressive leur introduction au cours de l'année. L'acquisition de ce socle par les élèves constitue un objectif prioritaire pour le professeur.

Il contribue à l'approfondissement de la culture scientifique générale en donnant aux élèves un accès à quelques domaines fondamentaux des mathématiques comme l'algèbre linéaire, dans son aspect matriciel, les probabilités qui préparent entre autre à la compréhension et la prise en compte de l'aléatoire, et enfin l'analyse où les élèves acquièrent de bonnes bases sur les notions de suite et de fonction. L'objectif n'est pas de former des professionnels des mathématiques, mais des personnes capables d'utiliser des outils mathématiques ou d'en comprendre l'usage dans diverses situations de leur parcours académique et professionnel.

L'orientation du programme vers les sciences de l'économie et de la gestion s'organise autour des trois points forts suivants :

– En algèbre linéaire, la résolution des systèmes d'équations lineaires, le calcul matriciel et la structure vectorielle, ce qui permet l'étude des phénomènes itératifs à plusieurs dimensions (chaînes de Markov) ;
– En analyse, les phénomènes discrets, décrits par des suites, et les phénomènes continus, décrits par des fonctions, l'emploi de représentations graphiques pour l'étude qualitative et quantitative de ces phénomènes, la maîtrise des fonctions usuelles, notamment les fonctions logarithme, exponentielle et puissances ; on se concentre essentiellement sur une pratique effective de l'analyse et on cherche principalement à développer chez l'élève l'aspect opératoire en évitant autant les questions les plus fines ou spécialisées que les exemples "pathologiques". Le programme se limite aux notions utiles à la description de situations économiques et aux calcul des probabilités ;
– En probabilité et en statistique, la consolidation des acquis de l'enseignement secondaire et l'initiation aux phénomènes aléatoires, ainsi que la modélisation des situations probabilistes et en particulier l'emploi des lois usuelles.

L'évolution des matériels et logiciels conduit à renforcer la partie réservée à l'algorithmique. En effet, ces moyens de calcul permettent aux mathématiques de disposer d'un lien vivant à l'expérimentation. On présentera de préférence, lorsque cela est possible, des méthodes constructives accompagnées de la description d'un algorithme plutôt que des démonstrations d'existence ou de convergence démunies de procédé de construction. La présentation des algorithmes s'entend sur deux niveaux. D'une part, ils peuvent être présentés sous une forme logique abrégée, sans référence obligatoire à un langage informatique particulier ; d'autre part, ils sont destinés à être mis en œuvre sur machine à l'occasion des heures passées en salle d'informatique sous forme de travaux pratiques de mathématiques.

Ainsi, le programme encourage la démarche algorithmique et le recours à l'outil informatique. Il identifie un certain nombre d'algorithmes (calcul des termes d'une suite, calcul de valeurs approchées de la limite d'une suite convergente, méthodes de dichotomie et des approximations successives pour la résolution d'une équation, méthodes de calcul approché d'intégrales, résolution de systèmes d'équations linéaires, etc.) qui doivent être connus et pratiqués par les élèves. Ceux-ci doivent également savoir utiliser les fonctionnalités graphiques des calculatrices et des logiciels de simulation, et doivent être entraînés à la construction et à la reconnaissance d'algorithmes relevant de la simulation de lois de probabilité et des expériences aléatoires.

Cette partie du programme est commune aux deux options de la filière économique et comerciale ; le logiciel de référence choisi pour traiter cette partie du programme est Scilab.

1.4 Organisation temporelle de la formation

Le programme de la classe de première année ECS est présenté en deux parties, chacune d'elles correspondant à une période. Le programme de la preimère période est étudié complètement en premier lieu, lors des quatres premiers mois de l'année ; celui de la deuxième période est ensuite abordé.

Le programme doit être traité en veillant à alterner, de préférence, des chapitres d'analyse et de probabilité d'une part et d'algèbre linéaire de l'autre. Le dernier chapitre (algorithmique et utilisation de l'informatique) doit être introduit progressivement et ceci tout au long de l'année. Les autres chapitres sont exposés dans l'ordre choisi par le professeur, en respectant les deux périodes d'enseignement.

Les objectifs majeurs du programme de la premire période sont les suivants :

✓ assurer la progressivité du passage aux études supérieures en commençant les cours dans le prolongement des programmes du cycle du baccalauréat (filières : sciences mathématiques et sciences expérimentales), mettant ainsi à profit les connaissances acquises au lycée ;
✓ familiariser les élèves avec la terminologie française ;

✓ amener les élèves vers des problèmes effectifs d'analyse, de probabilités et d'algèbre linéaire en veillant à développer leur
  - intuition,
  - capacité à formuler clairement des résultats ou des raisonnements,
  - capacité à mettre au point des démonstrations,

✓ mettre en place certaines notions et techniques de calcul et de raisonnement fondamentales pour la suite du cursus, et susciter la curiosité et l'intérêt des élèves en leur présentant un spectre suffisamment large de problématiques et de champs nouveaux ;

✓ donner les bases mathématiques indispensables à l'enseignement des autres disciplines (économie, gestion, informatique, etc.).

1.5 Recommandatons pédagogiques

Ce programme propose des activités dont les unes mettent en œuvre des techniques classiques et bien délimitées qui doivent être maîtrisées par les élèves, les autres visent à développer un savoir-faire ou à illustrer une idée, et avec lesquelles les élèves doivent acquérir une certaine familiarité. Les travaux dirigés sont le moment privilégié de la mise en œuvre, et de la prise en main de ces techniques classiques dont la maîtrise s'acquiert notamment grâce à des exercices et à des problèmes que les élèves doivent in fine être capables de résoudre par eux-mêmes.

Les développements formels ou trop abstraits doivent être évités ; une place importante doit être faite aux applications, exercices, problèmes, en relation chaque fois que cela est possible avec les enseignements d'économie, de gestion et d'informatique, tout en évitant les situations artificielles ainsi que les exercices de pure virtuosité technique.

Les interactions entre les différentes parties du programme sont fortes et mériteront d'être soulignées, de même que les liens avec d'autres disciplines, permettant ainsi de mettre en évidence la spécificité et la valeur de la démarche mathématique.

Le programme est présenté en deux grandes parties, mais son organisation n'est pas un plan de cours ; il va de soi que cette présentation n'est qu'une commodité de rédaction et ne doit pas faire oublier les interactions nombreuses et étroites entre les différents domaines des mathématiques.

Les chapitres qui composent le programme suivent un ordre thématique qui n'est d'ailleurs pas le seul possible. Cette organisation a pour objet de présenter les différentes notions du programme de mathématiques et ne peut en aucun cas être considéré comme une progression de cours.

Chaque professeur adopte librement la progression qu'il juge adaptée au niveau de sa classe et conduit l'organisation de son enseignement dans le respect de la cohérence de la formation globale. Il choisit ses méthodes et ses problématiques en privilégiant la mise en activité [1] des élèves et en évitant tout dogmatisme. En effet l'acquisition des connaissances et des capacités est d'autant plus efficace que les élèves sont acteurs de leur formation. Le contexte d'enseignement retenu doit motiver les élèves, favoriser l'acquisition des connaissances et permettre le développement de leurs compétences et capacités.

En contrepartie de cette liberté dans l'organisation de la progression, le respect des **objectifs de formation et son étalement dans l'année**, comme indiqués ci-dessus, reste une nécessité incontournable.

1. "Tell me and I forget, teach me and I may remember, involve me and I learn." Benjamin Franklin (≪ Dis-moi et j'oublie, enseignes-moi et je peux me rappeler, impliques-moi et j'apprends. ≫)

2 Première période

2.1 Raisonnements, notions d'ensemble et d'application

Ce chapitre regroupe différents points de vocabulaire, notations et modes de raisonnement nécessaires aux élèves pour la conception, l'argumentation et la rédaction efficace d'une démonstration mathématique.

Ces notions doivent être introduites de manière progressive, au fur et à mesure des besoins et des exemples rencontrés dans le programme, en vue d'être acquises en fin de la première période. Elles ne doivent faire l'objet d'aucune étude exhaustive bloquée en début d'année.

Il est recommandé d'utiliser des exemples simples pour illustrer et manipuler ces notions. On évitera les présentations trop formelles.

2.1.1 Éléments de logique et raisonnements

Il est attendu qu'à l'issue de cette section, les élèves sachent :

- *utiliser correctement les connecteurs logiques ;*
- *utiliser à bon escient les quantificateurs universel, existentiel et repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles ;*
- *utiliser correctement les expressions ≪ condition nécessaire ≫, ≪ condition suffisante ≫ ;*
- *formuler la négation d'une proposition ;*
- *distinguer, dans le cas d'une proposition conditionnelle, la proposition directe, sa réciproque, sa contraposée et sa négation ;*
- *utiliser un contre-exemple pour infirmer une proposition universelle ;*
- *reconnaître et utiliser des types de raisonnement spécifiques : raisonnement par disjonction des cas, raisonnement par contraposée, raisonnement par l'absurde.*

Notion d'énoncé mathématique ; négation d'un énoncé ; connecteurs ≪ et ≫, ≪ ou ≫ et ≪ non ≫. Implication, équivalence logique, condition nécessaire, condition suffisante.	Les élèves doivent être capables de formuler la négation d'un énoncé.
Quantificateurs universel $\forall$ et existentiel $\exists$.	Les élèves doivent être entraînés à l'emploi des quantificateurs pour formuler avec précision les énoncés mathématiques ainsi que leurs négations. Mais l'utilisation des quantificateurs et des symboles mathématiques en tant qu'abréviations doit être évitée.
Raisonnement par contraposition ; raisonnement par disjonction des cas ; raisonnement par l'absurde.	Introduire ces notions au moyen de plusieurs exemples utilisant les acquis du lycée en algèbre et/ou en analyse.

2.1.2 Notion d'ensemble et notion d'application

Ensembles. Éléments d'un ensemble, relation d'appartenance. Parties (ou sous-ensembles) d'un ensemble, relation d'inclusion. Notations $\in$ et $\subset$.	Les symboles $\in$ et $\subset$ doivent être connus des élèves qui doivent bien les distinguer. L'ensemble vide est noté $\emptyset$.

L'ensemble des parties d'un ensemble E est noté $\mathcal{P}(E)$.	Donner des exemples concrets de $\mathcal{P}(E)$, notamment pour E fini. Ces exemples sont utiles pour introduire ultérieurement la notion de tribu.
Opérations sur les parties d'un ensemble : réunion, intersection, différence, passage au complémentaire. Partition d'un ensemble.	Notations $\bigcap$ et $\bigcup$. Notation $A \setminus B$ pour la différence et $E \setminus A$ ou C_E^A pour le complémentaire d'une partie A de E ou même $\overline{A}$ s'il n'y a pas d'ambiguité sur E.
Propriétés usuelles de ces opérations. Distributivité. Lois de Morgan.	Relier connecteurs logiques et opérations ensemblistes.
Produit cartésien d'ensembles.	Notions de couple, de triplet, de n-uplet. Notations $E \times F$, E^2 et E^n, $n \geq 2$.
Application de E vers F. Prolongement d'une application, restriction d'une application.	Insister sur l'existence et l'unicité de l'image de tout élément de l'ensemble de départ E. Notations $\mathcal{F}(E, F)$ et F^E. La restriction de f à une partie A de E est notée $f_{\mid A}$.
Famille indexée par un ensemble non vide.	Cette notion est utile notamment pour introduire ultérieurement la notion de famille de vecteurs et la notion de tribu.
Indicatrice d'une partie A d'un ensemble E.	Notation 1_A ; $1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \in E \setminus A. \end{cases}$
Image directe, image réciproque d'applications.	Notations $f(A)$ et $f^{-1}(B)$.
Application injective, surjective, bijective. Application réciproque d'une bijection. Composition d'applications ; composées d'injections, de surjections, de bijections. Réciproque de la composée de deux bijections.	Les exemples utilisant les acquis du lycée en algèbre et en analyse sont intéressants à étudier. L'application réciproque d'une bijection f est notée f^{-1}. La notation $f^{-1}(B)$ est cohérente.

2.2 Entiers naturels et combinatoire élémentaire

Ce chapitre constitue une brève initiation aux techniques élémentaires de la combinatoire ; l'objectif est de consolider les acquis du secondaire.

On introduit sans formalisation excessive la notion de cardinal et on admet sans démonstration les propriétés les plus intuitives ; on donnera aussi l'interprétation combinatoire des coefficients binomiaux.

Les élèves seront amenés à dénombrer des ensembles en utilisant correctement le language combinatoire ; les situations classique des tirages représentent le modèle incontournable.

Ce chapitre est aussi l'occasion d'illustrer le raisonnement par récurrence.

Ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels : propriétés usuelles des entiers, opérations, ordre. Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.	On ne construit pas $\mathbb{N}$, on rappelle et on utilise ses propriétés.
Raisonnement par récurrence : principe et exemples d'utilisation du raisonnement par récurrence (faible et forte).	Pas d'exposé théorique sur le raisonnement par récurrence.
Somme et produit d'une famille finie de nombres réels. Notations $\sum$, $\prod$.	Les élèves doivent savoir employer les notations $\sum_{i=1}^n x_i$, $\prod_{i=1}^n x_i$, $\sum_{w\in\Omega} x_w$ et $\prod_{w\in\Omega} x_w$ où Ω désigne ensemble fini.

Sommes doubles, sommes triangulaires. Produit de deux sommes finies. Exemples de changements d'indices et de regroupements de termes.	Cas de $\sum_{(i,j)\in A} x_{i,j}$ et $\prod_{(i,j)\in A} x_{i,j}$ où A désigne un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}^2$ ou de $\mathbb{Z}^2$.
Télescopages. Application au calcul du n-ième terme d'une suite arithmétique ou géométrique.	Cas du n-ième terme d'une suites arithmético-géométriques : on se ramenera à une suite géométrique.
Calculs de sommes partielles des termes d'une suite arithmétique ou géométrique.	Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calcul des sommes usuelles : $\sum_{k=1}^n k$; $\sum_{k=1}^n k^2$; $\sum_{k=1}^n k^3$; $\sum_{k=0}^n q^k$, $q \in \mathbb{R}$.
Factorielle. Coefficients binomiaux, expression avec la fonction factorielle.	Notations $n!$, $\binom{n}{p}$. Relation avec le nombre de chemins réalisant p succès pour n répétitions dans un arbre binaire.
Formule et triangle de PASCAL. Formule du binôme de NEWTON.	Factorisation de $a^n - b^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $a, b \in \mathbb{R}$.
Ensembles finis. Cardinal d'un ensemble fini. Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité.	Notations $\|A\|$, $Card(A)$, $\#A$. Tout fondement théorique de la notion de cardinal est hors programme.
Cardinal de la réunion et du produit de deux ensembles finis. Conservation du cardinal par une bijection.Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.	
Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un autre. Si E est un ensemble de cardinal n : nombre de permutations de E, nombre de parties à k éléments de E, nombre de $k-$listes d'éléments de E.	On peut dénombrer l'ensemble des injections, surjections, bijections d'un ensemble fini vers un ensemble fini.
Ensembles dénombrables : défintion et exemples.	A est dénombrable s'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ sur A.

2.3 Nombres réels, complexes et polynômes

2.3.1 Nombres réels

Les nombres réels sont supposés connus ; on rappelle leurs propriétés fondamentales sans pour autant adopter un point de vue axiomatique.

Il est attendu qu'à l'issue de cette section, les élèves aient une bonne maîtrise des automatismes et du vocabulaire de base relatifs aux inégalités.

On peut utiliser les quantificateurs pour formuler certaines propriétés des réels (notamment celles relatives à l'ordre) et obtenir leurs négations.

Nombres réels, opérations, relation d'ordre.	La construction de $\mathbb{R}$ n'est pas au programme. Il est possible de présenter les réels à partir de la notion de développement décimal illimité. La propriété « $\mathbb{R}$ est un ensemble inifi non dénombrable »est admise et doit être connue.
Propriété d'ARCHIMÈDE. Parties entière et fractionnaire d'un nombre réel.	Notations $\lfloor x \rfloor$, $\{x\}$; $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

Inégalités dans $\mathbb{R}$. Valeur absolue, inégalité triangulaire.	Interprétation sur la droite réelle d'inégalités du type $\lvert x-a\rvert \leq \alpha$, $\lvert x-a\rvert < \alpha$, $\alpha > 0$.
Majorant, minorant, maximum, minimum d'une partie non vide de $\mathbb{R}$. Notion de borne supérieure, inférieure.	Notations : $\max, \min, \sup, \inf$.
Axiome de la borne supérieure/inférieure.	Résultat admis : Pour toute partie A non vide et majorée de $\mathbb{R}$ il existe un plus petit majorant appelé la borne supérieure de A. Notations $\sup A$.
Une partie X de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si pour tous $a, b \in X$ tels que $a \leqslant b$, $[a, b] \subset X$. Segment.	$[a, b]$ peut être introduit comme étant l'ensemble $\{x \in \mathbb{R},\ a \leq x \leq b\}$. Intervalle admettant un plus petit et un plus grand élément.

2.3.2 Nombres complexes.

L'objectif de cette section est de consolider les notions sur les nombres complexes, acquises en classe de terminale du cycle du baccalauréat, afin que les élèves sachent les manipuler avec aisance. Il est recommandé d'utiliser l'interprétation géométrique des nombres complexes et d'illustrer le cours par de nombreuses figures.

Notation algébrique d'un nombre complexe. Parties réelle et imaginaire.	Notations $\mathrm{Re}\,(z)$ et $\mathrm{Im}\,(z)$. La construction de $\mathbb{C}$ est hors programme. L'interprétation géométrique est utile et doit faire l'objet d'exercices.
Conjugaison. Opérations sur les nombres complexes, propriétés. Module d'un complexe, relation $\lvert z\rvert^2 = z\overline{z}$. Module de $z_1 z_2$, de $z_1 + z_2$. Inégalité triangulaire.	Compatibilité de la conjugaison avec les opérations.
Cercle trigonométrique, paramétrisation par les fonctions circulaires, définition de e^{it}, $t \in \mathbb{R}$. Formules d'EULER et de MOIVRE.	Trigonométrie usuelle, en particulier cosinus et sinus d'une somme $\alpha + \beta$.
Forme trigonométrique $re^{i\theta}$, avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, d'un complexe non nul. Arguments. Arguments d'un produit, d'un quotient.	Interprétation géométrique. Transformation de $a\cos\theta + b\sin\theta$ en $r\cos(\theta - \varphi)$.
Équation du second degré dans $\mathbb{C}$. Cas particulier de coefficients réels.	Racines n-ièmes de l'unité en exercices. Exemples d'équations algébriques dans $\mathbb{C}$.
Définition de l'exponentielle complexe. Exponentielle d'une somme.	Notations $\exp(z)$, e^z. $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\,(z)}\,\mathrm{e}^{i\,\mathrm{Im}\,(z)}$.
Sommes et produits d'une famille finie de nombres complexes. Somme double, sommes triangulaires. Produit de deux sommes finies. Formule du binôme de NEWTON.	Notations : $\sum$, $\prod$. Exemples de changements d'indices et de regroupements de termes.Télescopages.
Sommes géométriques $\sum_{k=0}^{n} z^k$.	Factorisation de $v^n - u^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $u, v \in \mathbb{C}$.

2.3.3 Polynômes

La construction des polynômes formels n'est pas au programme ; on pourra identifier polynômes et fonctions polynomiales. L'objectif est d'aboutir au théorème de d'Alembert-Gauss *et à la factorisation dans* $\mathbb{R}[X]$ *et* $\mathbb{C}[X]$ *de polynômes à coefficients réels.*

Ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.	Sous ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n.
Degré d'un polynôme.	Par convention le degré du polynôme nul est $-\infty$.
Opérations algébriques sur les polynômes. Dérivation formelle d'un polynôme. Division euclidienne. Multiples, diviseurs.	Degré d'une somme, d'un produit, du polynôme dérivé.
Racine, ordre de muliplicité d'une racine a.	Caractérisation de la multiplicité par factorisation d'une puissance de $X - a$.
Polynômes scindés. Théorème de d'Alembert-Gauss.	La démonstration est hors programme. Exercices simples de factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

2.4 Éléments d'algèbre linéaire

L'objet de cette partie est de mettre en place l'outil vectoriel dès la première période, afin de confronter rapidement les élèves aux notions étudiées dans le cours d'algèbre linéaire. Dans un premier temps, on présentera la notion de matrices et l'on familiarisera les élèves à la manipulation de ces objets avant d'en aborder les aspects vectoriels. On peut ainsi formaliser les résultats relatifs aux systèmes d'équations linéaires ou aux polynômes et étudier les notions de combinaison linéaire et de base.

Cette étude, et en particilier celle de la partie relative au calcul matriciel, pourra être menée en lien avec l'algorithmique et l'utilisation de l'informatique.

La notation $\mathbb{K}$ *désigne uniquement l'ensemble des nombres réels* $\mathbb{R}$ *ou celui des nombres complexes* $\mathbb{C}$ *; les éléments de* $\mathbb{K}$ *sont appelés des scalaires.*

2.4.1 Calcul matriciel

Ensemble des matrices à n lignes et p colonnes, à coefficients dans $\mathbb{K}$, $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.	Notation $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Opérations algébriques dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: multiplication par un scalaire, somme et produit de deux matrices.	Les opérations peuvent être présentées à partir d'exemples issus de situations concrètes ; les propriétés des opértions peuvent être admises sans démonstration et illustrées sur des exemples.
Formule du binôme de Newton pour des matrices qui commutent.	On se limitera en pratique à des exemples simples et notamment lorsque l'une des matrices est nilpotente.
Transposition d'une matrice. Matrice transposée d'un produit AB.	Notation ${}^tM$.

2.4.2 Systèmes d'équations linéaires

Dans ce chapitre, on étudie les systèmes d'équations linéaires à coefficients réels ou complexes. Les solutions de tels systèmes sont obtenues en utilisant les opérations élémentaires sur les lignes (méthode de Gauss*).*

Il est attendu qu'à l'issue de ce chapitre, les élèves soient capables, au moyen de l'algorithme de Gauss*, de résoudre un système d'équations linéaires notamment en petite dimension ($n, p \leq 3$).*

Système linéaire de n équations à p inconnues, à coefficients $a_{i,j}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant p$ et second membre $b_1, \ldots, b_n$. Les $a_{i,j}$ et b_i sont des éléments de $\mathbb{K}$.	On peut présenter le système sous forme de couple : tableau A des $a_{i,j}$, colonne B des b_i ; on peut aussi introduire T, appelé tableau augmenté, de terme général $t_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} & \text{si } 1 \leq j \leq p \\ b_i & \text{si } j = p+1 \end{cases}$. Ces présentations simplifiées sont intéressantes pour le traitement informatique d'un système linéaire. Elle conduisent naturellement à l'utilisation de matrices.
Solutions dans $\mathbb{K}^p$ d'un système linéaire. Systèmes équivalents.	Si S désigne le système linéaire on note $\Sigma(S)$ l'ensemble des solutions. $\Sigma(S)$ est un sous-ensemble de $\mathbb{K}^p$.
Système linéaire homogène : les b_i sont tous nuls.	Dans le cas homogène, $\Sigma(S) \neq \emptyset$ et pour tous $(x_1, \ldots, x_p)$, $(x'_1, \ldots, x'_p) \in \Sigma(S)$ et tout couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, $(\alpha x_1 + \beta x'_1, \ldots, \alpha x_p + \beta x'_p) \in \Sigma(S)$.
Un système est dit triangulaire lorsque $n = p$ et $a_{i,j} = 0$ pour $j < i$.	
Systèmes de Cramer.	Résolution d'un systèmes de Cramer triangulaire.
Opérations élémentaires sur les lignes d'un système linéaire. Une opération élémentaire transforme un système linéaire S en un système linéaire S' qui lui est équivalent.	On adoptera les notations suivantes pour le codage des opérations élémentaires sur les lignes : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ (transvection), $L_i \leftrightarrow L_j$ (échange), $L_i \leftarrow \alpha L_i$, $\alpha \neq 0$ (dilatation).
Méthode du pivot de Gauss pour résoudre un système d'équations linéaires.	
Écriture matricielle d'un système d'équations linéaires. Extension des opérations élémentaires de Gauss aux matrices (opérations sur les lignes).	

2.4.3 Matrices carrées, inversibilité

Matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.	Notation $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Cas particuliers remarquables : matrice identité, matrice diagonale, matrice triangulaire, matrice symétrique, matrice antisymétrique.	Notations I_n, $diag(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Caractérisation d'une matrice symétrique (antisymétrique) à l'aide de la transposée.

Matrices inversibles, inverse d'une matrice. Ensemble $GL_n(\mathbb{K})$ des matrices inversibles. Expression de l'inverse d'une matrice $M \in Gl_2(\mathbb{K})$.	On admettra que pour une matrice carrée, un inverse à gauche ou à droite est l'inverse.
Critère d'nversibilité des matrices triangulaires.	Cas particulier d'une matrice diagonale, expression de l'inverse éventuel.
Inverse d'un produit, d'une transposée.	
Calcul de l'inverse d'une matrice M par résolution du système d'équations linéaires $MX = Y$. Méthode de Gauss-Jordan pour étudier l'inversibilité et calculer l'inverse éventuel.	On écrit $MA = I_n$ et on utilise les opèrations élémentaires sur les lignes, qui agissent par produit matriciel à gauche.

2.4.4 Notion d'espace vectoriel, notion d'application linéaire

Cette première approche des espaces vectoriels et des applications linéaires permet d'introduire le vocabulaire et sera accompagnée de nombreux exemples.

Il sera utile, à l'occasion d'autres chapitres en analyse ou en probabilité, de rappeler la structure d'espace vectoriel des ensembles les plus courants, afin de familiariser les élèves avec le vocabulaire et les notions fondamentales, avant une étude plus approfondie de ces espaces durant la seconde période.

Espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.	Les ensembles $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}^A$ possèdent une structure d'espace vectoriel naturelle.
Combinaisons linéaires. Sous-espaces vectoriels. Famille génératrice d'un espace vectoriel, famille libre, famille liée. Bases.	On ne considèrera que des combinaisons linéaires de familles finies. Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie d'éléments. Exemple de la base canonique de $\mathbb{K}^n$, de $\mathbb{K}_n[X]$
Structure de l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires.	Dans le cas d'un système linéaire homogène à p inconnues c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.
Application lineáre entre espaces vectoriels. Combinaisons linéaires d'applications linéaires. Composées d'applications linéaires.	Pour tout $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, l'application $X \mapsto AX$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ vers $\mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ est linéaire. Proposer des exemples d'applications linéaires dans le cas d'espaces de polynômes, de suites ou de fonctions.

2.5 Analyse réelle élémentaire

L'objectif de ce chapitre est de familiariser les élèves avec des méthodes d'analyse. Le théorème de la borne supérieure est admis. La pratique des inégalités est à la base du cours d'analyse ; on s'assurera que celle-ci est acquise à l'occasion d'exercices. On évitera la recherche d'hypothèses minimales, tant dans les théorèmes que dans les sujets d'exercices ou de problèmes proposés. Aucune démonstration n'est exigible.

2.5.1 Suites de nombres réels

Cette section est consacrée aux suites numériques et combine l'étude des aspects qualitatifs (monotonie, convergence, divergence) et celle des aspects quantitatifs (majoration, encadrement, etc.).

On soulignera l'intérêt des suites, tant du point de vue pratique (modélisation de phénomènes discrets) que théorique (approximation de nombres réels).

Les théorèmes sont énoncés mais leurs démonstrations ne sont pas exigibles ; ils sont illustrés par de nombreux exemples et applications. On présentera des exemples de suites issus de situations économiques ou financières.

Suites dans $\mathbb{R}$. Suite arithmétique, géométrique. Suite arithmético-géométrique.	Les élèves doivent savoir déterminer une expression du terme général u_n d'une telle suite en fonction de n.
Suite majorée, minorée, bornée. Suite stationnaire, monotone, strictement monotone.	
Suite convergente, divergente. Limite finie ou infinie d'une suite. Unicité de la limite. Exemples de suites convergentes, exemples de suites divergentes.	On dit que (u_n) converge vers ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient les u_n pour tous les indices n, sauf pour un nombre fini d'entre eux. Proposer une définition quantifiée de la limite ℓ (traduction en ε, n_0) sans en faire un usage systématique. Notation $u_n \longrightarrow \ell$. Écriture $\lim u_n = \ell$.
Toute suite convergente est bornée.	
Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient.	Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle. Exemples de formes indéterminées.
Stabilité des inégalités larges par passage à la limite. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.	
Théorème de convergence par encadrement.	Théorèmes de divergence par minoration ou majoration.
Théorème de la limite monotone : toute suite monotone possède une limite.	Une suite croissante (décroissante) majorée (minorée) admet pour limite sa borne supérieure (inférieure). Une suite croissante (décroissante) non majorée (non minorée) admet pour limite $+\infty$ ($-\infty$).
Théorème des suites adjacentes.	Si les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes alors elles sont convergentes et possèdent la même limite.
Définition d'une suite extraite. Si une suite possède une limite, toutes ses suites extraites possèdent la même limite. Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers ℓ, alors (u_n) tend vers ℓ.	Exemples d'utilisation pour montrer la divergence d'une suite.
Comparaison des suites usuelles $(n!)$, (q^n), (n^a), $(\ln^b(n))$.	Utilisation de comparaisons de suites pour déterminer la nature d'une suite monotone.
Suites vérifiant une relation linéaire de récurrence d'ordre 2 à coefficients réels. Équation caractéristique, structure des solutions.	Cette partie pourra être l'occasion d'illustrer, dans un cas concret, les notions de famille libre, génératrice et de base. Dans le cas de racines complexes conjuguées (notées λ et $\overline{\lambda}$), on pourra introduire les suites $\big(r^n\cos(n\theta)\big)$ et $\big(r^n\sin(n\theta)\big)$ avec $\lambda = re^{i\theta}$.

2.5.2 Fonctions réelles d'une variable réelle : limites, continuité

Pour les résultats du cours relatif à cette section, on se limitera aux fonctions définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ mais il est attendu que les élèves sachent étudier les situations qui s'y ramènent simplement.

Limites	
Notion de limite en a pour une application f à valeurs réelles définie sur l'intervalle I dont a est un élément ou une extrémité.	f admet b pour limite en a si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout élément x de $I\cap]a-\alpha, a+\alpha[$, $f(x) \in]b-\varepsilon, b+\varepsilon[$. Si $a = +\infty$ $(-\infty)$ on remplace $I\cap]a-\alpha, a+\alpha[$ par $I\cap]\alpha, +\infty[$ $(I\cap]-\infty, -\alpha[)$. Si $b = +\infty$ $(-\infty)$ on remplace $]b-\varepsilon, b+\varepsilon[$ par $]\varepsilon, +\infty[$ $(]-\infty, -\varepsilon[)$.
Unicité de la limite.	Notation $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.
Limite à gauche, limite à droite.	Notation $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.
Limites et opérations algébriques. Compatibilité limite-relation d'ordre. Théorème de limite par encadrement.	
Limite et suites.	Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ alors, pour toute suite (u_n) qui converge vers a, on a $\lim f(u_n) = b$. La caractérisation séquentielle de la limite est hors programme.
Limite d'une fonction composée.	
Théorèmes de limite par monotonie.	Si f est croissante sur $]a, b[$ (avec $b \leq +\infty$) elle admet β pour limite en b^- où $\beta = \sup_{]a,b[} f$ si f est majorée et $\beta = +\infty$ sinon. Si f est décroissante sur $]a, b[$ (avec $b \leq +\infty$) elle admet β pour limite en b^- où $\beta = \inf_{]a,b[} f$ si f est minorée et $\beta = -\infty$ sinon. Si f est monotone sur $]a, b[$ (avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$) elle admet une limite finie λ en c^- et une limite finie μ en c^+ pour tout c fixé dans $]a, b[$.
Continuité en un point	
Définition de la continuité en a, pour une fonction f réelle de la variable réelle.	f est dite continue en a si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. La caractérisation séquentielle de la continuité est hors programme.
Opérations algébriques et continuité. Composition de fonctions continues. Prolongement par continuité en un point.	
Propriétés globales d'une fonction de la variable réelle.	
Parité, imparité. Monotonie d'une fonction de la variable réelle.	Partie paire, partie impaire d'une application de D vers $\mathbb{R}$, lorsque D est une partie symétrique de $\mathbb{R}$.
Périodicité.	L'ensemble des applications $T-$périodiques possède une structure d'espace vectoriel réel.

Applications majorée, minorée, bornée.	L'ensemble des applications bornées possède une structure d'espace vectoriel réel.
Continuité sur un domaine D. Opérations algébriques, composées de fonctions continues.	L'ensemble des applications de D vers $\mathbb{R}$ qui sont continues sur D possède une structure d'espace vectoriel réel.
Théorème de point fixe pour une suite définie par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$: si la suite u converge vers ℓ alors $f(\ell) = \ell$.	On suppose : (1) la fonction f continue sur l'intervalle I et d'image $f(I)$ contenue dans I, (2) u_0 choisi dans I et (3) la suite u convergente.
Applications continues par morceaux sur un segment $[a, b]$. Structure vectorielle.	L'application f est continue par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0, a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ et que, pour tout i entier entre 1 et n, la restriction de f à $]a_{i-1}, a_i[$ admet un prolongement continu sur $[a_{i-1}, a_i]$.
Théorème des valeurs intermédiaires. L'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle.	Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et si y est un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe x dans $[a, b]$ tel que $f(x) = y$.
L'image d'un segment par une application continue est un segment.	Si f est continue sur $[a, b]$ elle est majorée, minorée et elle atteint ses bornes. Notations $\max\limits_{[a,b]} f$ et de $\min\limits_{[a,b]} f$.
Théorème de la bijection : si f est continue et strictement monotone sur l'intervalle I, elle est bijective de I vers $f(I)$. La bijection réciproque possède alors les mêmes propriétés, avec le même sens de monotonie stricte.	Application du théorème de la bijection pour résoudre des équations non linéaires $f(x) = \alpha$. Méthode de dichotomie.
Étude d'une fonction de la variable réelle, tableau de variations, représentation graphique ; représentation graphique d'une fonction réciproque.	La notion de dérivée dans le paragraphe suivant apporte des outils supplémentaires pour dresser le tableau de variations d'une fonction de la variable réelle.

2.5.3 Fonctions réelles d'une variable réelle : dérivation, intégration.

Dérivation

Dérivée à gauche en a, dérivée à droite en a, dérivée en a. Dérivation et continuité.	Interprétations géométrique. Notations : $f'_g(a)$, $f'_d(a)$, $f'(a)$, $\frac{df}{dx}(a)$.
Fonction dérivable sur un intervalle ; fonction dérivée, notation f'.	Exemples de fonctions dérivables, polynômes, fractions rationnelles, exponentielle et logarithme, etc.
Opérations algébriques et dérivation. Dérivation d'une composée de fonctions dérivables. Dérivation d'une fonction réciproque.	
Théorème de Rolle. Théorème des accroissements finis (égalité et inégalité).	Si $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ drivable et $m \leq f' \leq M$ alors $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$. Si $\lvert f'\rvert \leq k$ alors $\lvert f(b) - f(a)\rvert \leq k\lvert b - a\rvert$. Applications à l'étude, sur des exemples, des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$.

Dérivation et monotonie : une fonction f, dérivable sur un intervalle I et admettant une dérivée $f'(x)$ nulle (positive, strictement positive) en tout point x de I, est constante (croissante, strictement croissante) sur I.	Si f est dérivable sur I et si $f' \geq 0$ sur I, f' ne s'annulant qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur I. Le résultat est encore vrai si l'hypothèse est réalisée sur I privé de $x_1, \ldots, x_n$ (un nombre fini de points) à condition de supposer f continue en ces points $x_1, \ldots, x_n$.
Application à l'étude des fonctions réelles d'une variablle réelle.	Tableau de variations.
Fonction de classe C^1 sur un intervalle.	
Définition de l'application Arctan. Dérivation.	Les formules trigonométriques relatives à Arctan ne sont pas au programme.

Intégration sur un segment

Définition de primitives d'une fonction définie sur un intervalle. Unicité à constante additive près.	Sur un intervalle, si F est une primitive de f, alors toute autre primitive de f est de la forme $F + c$ où c est une constante.
Théorème d'existence de primitives de f supposée continue sur l'intervalle I.	L'existence de primitives est admise. Exemples de primitives.
Définition de l'ntégrale de a à b d'une fonction f continue sur un intervalle I dont a, b sont éléments. Cette définition est indépendante du choix de la primitive F de f sur I.	Si f est continue sur un intervalle I, pour tout $(a, b) \in I^2$, on définit l'intégrale de f de a à b par : $$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$ où F est une primitive de f sur I.
Propriétés de l'intégrale : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.	Inégalité triangulaire : si f est continue sur $[a, b]$ avec $a \leq b$, alors $\left\lvert \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right\rvert \leq \int_a^b \lvert f(t) \rvert\,\mathrm{d}t$.
Intégrale d'une fonction continue positive et non identiquement nulle sur $[a, b]$.	
Techniques d'intégration : intégration par parties, changement de variable.	Fonctions supposées de classe C^1.
Extension de la définition et des propriétés de l'intégrale aux fonctions continues par morceaux sur un segment. Majoration de la valeur absolue d'une intégrale.	Si f est continue par morceaux sur $[a, b]$ avec $a \leq b$, alors $\left\lvert \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right\rvert \leq \int_a^b \lvert f(t) \rvert\,\mathrm{d}t$.
Sommes de Riemann à pas constant sur $[a, b]$. Convergence vers $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.	La preuve est exigible dans le cas d'une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$. Interprétation des intégrales au moyen de calculs d'aires.

2.6 Probabilité sur un univers fini

L'objectif de cette première approche est de mettre en place un cadre simplifié mais formalisé dans lequel on puisse mener des calculs de probabilités sans difficultés techniques majeures. Les situations et les concepts utilisés sont nécessairement simples, ne faisant appel qu'aux opérations logiques et *arithmétiques élémentaires.*

2.6.1 Espace probabilisable fini

L'ensemble des issues d'une expérience aléatoire est appelé univers et noté Ω. Dans ce paragraphe Ω est un ensemble fini non vide et on appelle événement tout sous-ensemble de Ω. L'ensemble des issues est Ω, l'ensemble des événements est $\mathcal{P}(\Omega)$.	Proposer des situations concrètes où le hasard intervient, proposer une modélisation mathématique. Un événement est à priori une assertion dont la véracité dépend du résultat de l'expérience. Les issues (ou aléas) qui la rendent vraie forment un sous ensemble de Ω, qu'on peut identifier à l'événement.
Événement contraire $\overline{A}$, événement A et B, événement A ou B, événement certain, événement impossible.	Le contraire d'un événement est au niveau logique sa négation et au niveau ensembliste son complémentaire. La conjonction d'événements correspond au connecteur logique « et »ainsi qu'à l'opération ensembliste $\cap$. Pour la disjonction c'est « ou »et $\cup$.
Des événements sont dits incompatibles quand ils ne peuvent se réaliser simultanément.	Pour deux événements A, B cela signifie que $A \cap B = \emptyset$. Pour une famille de plus de 2 événements distinguer « incompatibles »de « incompatibles deux à deux ».
Système complet d'événements : famille de sous ensembles deux à deux incompatibles et dont la réunion est Ω.	Partition de Ω.

2.6.2 Espace probabilisé fini

Une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ (avec Ω fini) est une application $\mathbb{P}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ vers $\mathbb{R}^+$ qui est additive et vérifie $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. Le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est appelé espace probabilisé.	La probabilité d'un événement A est le taux de chance de voir A se réaliser. L'additivité signifie : pour tous A et B incompatibles de $P(\Omega)$, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$. On en déduit que $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$ pour toute famille $A_1, \dots, A_n$ d'événements incompatibles deux à deux.
Une probabilité est déterminée par la famille $(\mathbb{P}(\{w\}))_{w \in \Omega}$, famille finie de réels positifs ayant pour somme 1. On a $\mathbb{P}(A) = \sum_{a \in A} \mathbb{P}(\{a\})$.	Cas de l'équiprobabilité.
Formule du crible de Poincaré.	Pour la formule de Poincaré on peut se limiter au cas de deux ou trois événements.

2.6.3 Probabilité conditionnelle, indépendance

Si B est un événement de probabilité $\mathbb{P}(B) > 0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par : $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(B)$.	Illustrer cette notion par des situations de la vie courante. La notation $\mathbb{P}(A\|B)$ est utilisée parfois à la place de $\mathbb{P}_B(A)$.

L'application $\mathbb{P}_B$ est une probabilité.
Formule des probabilités composées.

Si $\mathbb{P}(\cap_{i=1}^{n-1} A_i) \neq 0$, alors $\mathbb{P}(\cap_{i=1}^{n} A_i) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\cdots\mathbb{P}_{\cap_{i=1}^{n-1} A_i}(A_n)$.

Formule des probabilités totales : si $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ est un système complet d'événements, alors pour tout événement B on a $\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B\cap A_i)$.

Éliminant les A_i de probabilité 0, c'est aussi $\sum_i \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B)$.

Formule de Bayes :

$$\mathbb{P}_B(A_j) = \frac{\mathbb{P}_{A_j}(B)\mathbb{P}(A_j)}{\sum_i \mathbb{P}_{A_i}(B)\mathbb{P}(A_i)}$$

$A_1,\ldots,A_n$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles et on suppose $\mathbb{P}(B)\neq 0$.

Événements indépendants : $A_1,\ldots,A_n$ sont dits (mutuellement) indépendants si, quel que soit J sous ensemble de $[\![1,n]\!]$, $\mathbb{P}(\cap_{i\in J} A_i) = \prod_{i\in J}\mathbb{P}(A_i)$.

Si $\mathbb{P}(B) > 0$, l'indépendance de A et$B$ s'écrit $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$. Noter que l'indépendance des A_j implique l'indépendance deux à deux et que la récproque est fausse.

2.6.4 Variables aléatoires réelles

Notion de variable aléatoire.

On appelle variable aléatoire réelle toute application X de Ω vers $\mathbb{R}$.

Par abus de notation on écrit $\{X\in H\}$ ou $(X\in H)$ à la place de $X^{-1}(H) = \{\omega\in\Omega, X(\omega)\in H\}$.

Système complet associé à une variable aléatoire.
Loi $\mathbb{P}_X$ de la variable aléatoire X.
La donnée de $X(\Omega)$ et des probabilités correspondantes constitue la loi de X dans le cas fini.

$\mathbb{P}_X$ est la probabilité sur $\big(X(\Omega), \mathcal{P}(X(\Omega))\big)$ définie par $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(\{X\in A\})$; elle est déterminée par la donnée des $\mathbb{P}(\{X=x\})$, pour tout x élément de $X(\Omega)$.

Fonction de répartition F_X associée à la variable aléatoire X, définie par $F_X : x\in\mathbb{R}\longmapsto \mathbb{P}(\{X\leq x\})$.
Propriétés d'une fonction de répartition pour Ω fini.

C'est une fonction en escalier sur $\mathbb{R}$. Les sauts de cette fonction caractérisent l'image $X(\Omega)$ ainsi que les probabilités $\mathbb{P}(\{X=x\})$ pour $x\in X(\Omega)$.
La fonction de répartition caractérise la loi.

Somme de deux variables aléatoires. Composée d'une variable aléatoire réelle X par une fonction f, définie sur un domaine contenant $X(\Omega)$.

On écrit $f(X)$ au lieu de $f\circ X$.

Les variables aléatoires $X_1,\ldots,X_n$ sont dites indépendantes si, quel que soient $I_1,\ldots,I_n$ sous-ensembles de $\mathbb{R}$, les événements $\{X_1\in I_1\},\ldots,\{X_n\in I_n\}$ sont indépendants, autrement dit, pour tout sous-ensemble J de $[\![1,n]\!]$,

$$\mathbb{P}(\cap_{k\in J}\{X_k\in I_k\}) = \prod_{k\in J}\mathbb{P}(\{X_k\in I_k\}).$$

Noter que l'indépendance des X_j implique l'indépendance deux à deux et que la réciproque est fausse.

Espérance et variance d'une variable aléatoire

L'espérance de X est

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(\{X = x\}). \qquad (*)$$

C'est une moyenne pondérés des valeurs de X. On a aussi : $\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})$. $(**)$

Propriétés de $\mathbb{E}$: positivité, linéarité, croissance.

Utiliser $(**)$ pour les démonstrations.

Expression de $\mathbb{E}(XY)$ dans le cas de variables indépendantes.

Théorème de transfert : espérance de $f(X)$.

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}(\{X = x\}) = \sum_{\omega \in \Omega} f\big(X(\omega)\big)\mathbb{P}(\{\omega\}).$$

Cas d'une transformation affine $\mathbb{E}(aX+b) = a\mathbb{E}(X)+b$

Une variable aléatoire d'espérance nulle est dite centrée.

On note $\tilde{X}$ la variable centrée $X - \mathbb{E}(X)$.

La variance de X est $V(X) = \mathbb{E}((X - m)^2)$ où $m = \mathbb{E}(X)$. L'écart-type de X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Formule de Koenig-Hyugens :

$$\mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2.$$

Une variable aléatoire d'espérance nulle et de variance 1 est dite centrée réduite.

On note X^* la variable aléatoire centrée réduite $\frac{X-\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ lorsque $\sigma(X) \neq 0$.

Transformation affine

$V(aX + b) = a^2V(X)$.

Moment d'ordre r, r entier naturel non nul.

$m_r(X) = E(X^r)$

Lois usuelles

Loi certaine.

Loi de Bernoulli de paramètre p, $p \in [0, 1]$. Espérance, variance. Lien entre variable aléatoire de Bernoulli et indicatrice d'un événement.

Notation $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.
Interprétation : épreuve aléatoire à deux issues, succès avec probabilité p vs échec avec probabilité $q = 1 - p$.

Loi binomiale de paramètres n, p, $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$. Espérance, variance.

Notation : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.
Interprétation : nombre de succès lors de n répétitions indépendantes d'une épreuve de Bernoulli.

Si $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes et de même loi $\mathcal{B}(p)$ alors la somme $X_1 + \cdots + X_n$ est de loi $\mathcal{B}(n, p)$.

Loi uniforme sur un segment d'entiers $[\![m, n]\!]$. Espérance, variance.

Application, à l'étude de la loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$, où $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Notation $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a, b]\!])$.

3 Seconde période

3.1 Complément d'algèbre linéaire

L'objectif de ce chapitre est d'approfondir et compléter les notions d'algèbre linéaire vues en première période. Le corps des scalaires $\mathbb{K}$ des espaces vectoriels considérés est soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, soit $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

3.1.1 Bases, dimension d'un espace vectoriel

Espaces vectoriels admettant une famille génératrice finie. Famille génératrice minimale. Bases. Existence de bases.	Tous les résultats sont prouvés dans le cas d'espaces vectoriels admettant une famille génératrice finie.
Exemples. Base canonique d'espaces vectoriels usuels.	$\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Théorème de la base incomplète. Théorème de Steinitz.	Le cardinal d'une famille libre est toujours inférieur à celui d'une famille génératrice.
Dimension d'un espace vectoriel. Notation $\dim E$.	NB : on appelle ici cardinal d'une famille le cardinal de l'ensemble qui l'indexe.
Caractérisation des bases.	En dimension n une famille libre ou génératrice de cardinal n est une base.
Dimension d'un sous-espace vectoriel. Rang d'une famille de vecteurs.	Si F est un sous-espace vectoriel de E ayant une dimension finie et égale à $\dim E$, alors $F = E$.

3.1.2 Somme de sous-espaces vectoriels

Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels.	
Somme directe. Base adaptée à une somme directe.	Unicité de la décomposition d'un vecteur.
Sous-espaces vectoriels supplémentaires. Existence d'un supplémentaire en dimension finie.	
En dimension finie : dimension de $F+G$, dimension d'un supplémentaire, dimension d'une somme directe.	$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.
Caractérisation d'une somme directe par la somme des dimensions ou par le fait qu'une concaténation de bases soit une base de la somme.	Caractérisation de $E = F \oplus G$ par la dimension et l'intersection de F et G.

3.1.3 Applications linéaires

Espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$ des applications linéaires de E vers F. Composition d'applications linéaires.	Dimension de $\mathcal{L}(E,F)$ quand E et F sont de dimension finie.
Noyau et image d'une application linéaire.	Notations $\ker u$, $\operatorname{Im} u$, $u \in \mathcal{L}(E,F)$.
Si la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est génératrice de E, alors la famille image $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ engendre $\operatorname{Im}(u)$.	Lien entre recherche de l'image et résolution de systèmes linéaires.

Rang d'une application linéaire. Théorème du rang quand la dimension de l'espace de départ est finie.	Si u est une application linéaire de E vers F et si la dimension de E est finie, alors $$\dim(E) = \dim(\ker u) + \mathrm{rg}(u).$$
Isomorphismes de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.	Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est de dimension n si, et seulement si, il est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.
Formes linéaires. Hyperplans. Un hyperplan est par définition le noyau d'une forme linéare non nulle.	Si E est de dimension finie n, un hyperplan est un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$.
Endomorphismes, espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes de E.	Dimension de $\mathcal{L}(E)$ quand E est de dimension finie.
Formule du binôme sous l'hypothèse de commutation.	Puissances d'un endomorphisme.
Projecteurs et symétries associés à deux sous espaces vectoriels supplémentaires.	Caractérisation par les relations $p^2 = p$ et $s^2 = e$ où e est l'endomorphisme identité.
Automorphismes de E.	Notation $GL(E)$
Cas de la dimension finie.	Si la dimension de E est finie, un endomorphisme de E est injectif si, et seulement si, il est surjectif.

3.1.4 Représentations matricielles

Les espaces vectoriels considérés ici sont de dimensions finies.

Matrice colonne des coordonnées d'un vecteur dans une base $\mathcal{B}$, matrice représentant une famille finie de vecteurs dans $\mathcal{B}$,	Notations $Mat_{\mathcal{B}}(x)$, $Mat_{\mathcal{B}}(v_1, \ldots, v_p)$
Matrice de changement de bases.	$Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$, notée aussi $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.
Formules de changement de bases.	NB : l'inverse de $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.
Rang d'une matrice M appartenant à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.	M représente une famille $(v_1, \ldots, v_p)$ de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$; le rang de M est la dimension de l'espace vectoriel engendré par $(v_1, \ldots, v_p)$.
Structure des solutions du système linéaire $MX = Y$.	Relation avec le rang de M.
Une matrice a le même rang que sa transposée.	
Matrice représentant $u \in \mathcal{L}(E, F)$ dans un couple de bases $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$. Action sur un vecteur. Changement de bases. Égalité des rangs de u et de $Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(u)$.	Notation $Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(u)$. Interprétation matricielle de l'image d'un vecteur par une application linéaire.
Matrices d'une application linéaire composée.	$Mat_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_E}(v \circ u) = Mat_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_F}(v) Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(u)$.
Matrice d'un endomorphisme f de E dans la base $\mathcal{B}$.	Notation $Mat_{\mathcal{B}}(f)$.
Lien entre matrices carrées inversibles et automorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie.	En conséquence, l'inverse à gauche d'une matrice carrée est aussi inverse à droite.

Polynôme d'endomorphisme, polynôme de matrice carrée. Propriétés élémentaires. Polynômes annulateurs.	Utilisation de polynômes annulateurs pour calculer des puissances entières ou un inverse. Aucun résultat théorique au programme sur l'ensemble des polynômes annulateurs d'un endomorphisme ou d'une matrice.

3.2 Compléments d'analyse

Toutes les suites et fonctions étudiées sont, sauf mention contraire, à valeurs réelles. Le programme d'analyse de la seconde période est un approfondissement du programme d'analyse de première période. On développe l'étude des suites et des fonctions numériques (d'une variable réelle). Les problèmes de limite, de convergence, de comportement asymptotique sont au coeur du programme.

Les théorèmes présentés ne sont pas proposés avec des hypothèses minimales. Par exemple l'inégalité de TAYLOR-LAGRANGE *d'ordre n est énoncée pour des fonctions de classe C^{n+1}. On notera que plusieurs notions classiques relatives à ce programme sont absentes, comme la propriété de* CAUCHY*, le produit de* CAUCHY *de séries, la composition de développements limités. Et on se gardera de tout excès de technicité, par exemple lors de calculs de dérivation ou de recherche de développements limités.*

3.2.1 Comparaison asymptotique de suites

Suite négligeable devant une autre suite.	Notation $u_n = \circ(v_n)$.
Rappeler les croissances comparées usuelles.	
Propriétés élémentaires.	Transitivité de la relation « négligeable ».
Suite équivalente à une autre suite.	Notation $u_n \sim v_n$.
Propriétés élémentaires.	Symétrie et transitiité de l'équivalence.
La suite u est équivalente à la suite v si, et seulement si, la différence est négligeable devant v.	$u_n \sim v_n \Longleftrightarrow u_n = v_n + \circ(v_n)$.
Compatibilité de l'équivalence avec le produit, le quotient et l'élévation à une puissance.	

3.2.2 Comparaison locale ou asymptotique de fonctions

Fonction négligeable au voisinage de a devant une autre fonction.	Notations $f(x) = \underset{x\to a}{\circ}(g(x))$, $f = \underset{a}{\circ}(g)$.
Rappeler les croissances comparées usuelles.	
Propriétés élémentaires.	Transitivité de la relation « négligeable ».
Fonction équivalente au voisinage de a devant une autre fonction.	Notations $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, $f \underset{a}{\sim} g$.
Propriétés élémentaires.	Symétrie et transitiité de l'équivalence.
La fonction f est équivalente à la fonction g si, et seulement si, la différence est négligeable devant g.	$f \underset{a}{\sim} g \Longleftrightarrow f = g + \underset{a}{\circ}(g)$.
Compatibilité de l' équivalence avec le produit, le quotient et l'élévation à une puissance.	
Comparaison des exponentielles, puissances, logarithmes au voisinage de $+\infty$, de 0^+.	Utilisation de changements de variable pour comparer des fonctions.

3.2.3 Séries numériques

Ce chapitre sur les séries est étudié notamment pour son intérêt dans l'étude des variables aléatoires discrètes ; son objectif majeur est la maîtrise de la convergence absolue.

Il est attendu qu'à l'issue de ce chapitre, les élèves sachent établir la convergence ou la divergence d'une série dans des cas standard et en particulier soient capables de comparer une série à termes positifs aux séries de référence.

Série de terme général u_n. Sommes partielles. Convergence, divergence. Somme de la série et restes dans le cas de convegence.	On note $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ la somme de la série de terme général u_k, lorsqu'elle converge.
Le terme général d'une série convergente tend vers 0.	Divergence grossière.
Combinaison linéaire de séries convergentes.	Espace vectoriel des séries convergentes ; linéarité de la somme.
Série à termes positifs.	La suite des sommes partielles est croissante.
Une série à termes réels positifs converge si, et seulement si, la suite de ses sommes partielles est majorée.	Dans le cas où une série à termes positifs est divergente, il est pratique de convenir que sa somme est égale à $+\infty$.
Comparaison des natures de séries à termes positifs.	$u_n \leq v_n$ pour $n \geq n_0$, $u_n = \circ(v_n)$, $u_n \sim v_n$.
Convergence absolue.	
La convergence absolue d'une série $\sum_k u_k$ implique sa convergence, la réciproque est fausse. Inégalité triangulaire.	On a $u_k = u_k^+ - u_k^-$ et $\lvert u_k \rvert = u_k^+ + u_k^-$, où l'on a posé $x^+ = \max(x, 0)$ et $x^- = \max(-x, 0)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, toute série absolument convergente est la différence de deux séries à termes positifs convergentes.
La convergence absolue de $\sum_k u_k$ implique la convergence de la série $\sum_k u_{\sigma(k)}$ pour toute bijection σ de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$, ainsi que l'égalité des sommes $$\sum_{k=0}^{+\infty} u_{\sigma(k)} = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$	La démonstration de ce résultat dans le cas de séries à termes réels positifs est au programme. Le résultat général peut être admis.
Série exponentielle, $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$, $x \in \mathbb{R}$.	On peut utiliser ici une formule de TAYLOR.
Convergence des séries géométriques et de leurs séries dérivées.	Formules de sommation d'une telle série et de ses deux premièes dérivées.
Convergence des séries de RIEMANN.	
Utilisation des séries pour étudier les suites.	La suite $(u_n)_n$ et la série $\sum_k (u_{k+1} - u_k)$ sont de même nature.

3.2.4 Intégrales généralisées

L'objectif de ce chapitre est de définir, dans le cadre restreint des fonctions continues, la notion d'intégrale convergente sur un intervalle quelconque. On soulignera l'importance du principe de comparaison pour ramener l'étude de la convergence de l'intégrale d'une fonction à l'estimation de son comportement aux *bornes de l'intervalle d'intégration.*

Il est attendu qu'à l'issue de ce chapitre, les élèves
- *sachent établir la convergence ou la divergence d'une intégrale dans des cas standard et en particulier soient capables de comparer une fonction positive aux fonctions de référence ;*
- *aient mis en œuvre les techniques d'intégration usuelles pour étudier ou calculer l'ntégrale d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle quelconque.*

Convergence, divergence de l'intégrale d'une fonction f continue sur l'intervalle semi ouvert $I = [a, b[$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$.	On dit que f possède une intégrale convergente sur l'intervalle $[a, b[$ si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque x tend vers b. La limite est alors notée $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
Propriétés des intégrales convergentes : linéarité, relation de CHASLES, positivité et inégalités. Cas d'une fonction positive continue et d'intégrale nulle sur I.	On utilise les techniques de calcul habituelles (intégration par parties et changement de variable non affine) pour des intégrales sur des segments.
Convergence d'intégrales de fonctions positives.	Si $f \geq 0$, l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a, b[$.
Comparaison des natures d'intégrales de fonctions positives sur $[a, b[$.	Si f et g continues sont positives au voisinage de b, étude des cas $f(x) \leq g(x)$ pour $x \in [x_0, b[$, $f = \underset{b}{o}(g)$ et $f \underset{b}{\sim} (g)$.
Convergence absolue d'une intégrale.	
La convergence absolue d'une intégrale implique sa convergence, la réciproque est fausse.	On a $f = f^+ - f^-$ et $\lvert f \rvert = f^+ + f^-$. Ainsi, toute fonction ayant une intégrale absolument convergente sur I est la différence de deux fonctions continues et positives dont les intégrales sont convergentes sur I.
Extension des notions précédentes aux intégrales sur un intervalle quelconque.	Brève extension aux fonctions définies et continues sur $]a, b]$, avec $-\infty \leq a < b < +\infty$, ou sur l'intervalle $]a_1, a_2[\cup \cdots \cup]a_{p-1}, a_p[$, avec $-\infty \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_p \leq +\infty$.
Intégrales généralisées usuelles.	Étude de la convergence des intgrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha}\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(b-t)^\beta}\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\gamma t}\,\mathrm{d}t$, avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

3.2.5 Dérivées successives, formules de TAYLOR

Fonction p fois dérivable en un point, sur un domaine.	Notations : $f^{(p)}(a)$, $\dfrac{d^p f}{dt^p}(a)$.
Fonctions de classe C^p, de classe C^∞ sur un intervalle.	La dérivée $(n+1)$-ième d'un polynôme de degré au plus n est nulle.
Opérations algébriques, formule de LEIBNIZ. Composition et dérivation.	
Formule de TAYLOR avec reste sous forme d'intégrale. Inégalité de TAYLOR-LAGRANGE.	Formules données à l'ordre n pour une fonction de classe C^{n+1}.

Formule de TAYLOR-YOUNG à l'ordre n pour une fonction de classe C^n. Ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme et annulation des dérivées successives.	Résultat admis.

3.2.6 Développements limités

Définition du développement limité à l'ordre n en a. Unicité. Somme et produit de développements limités en a.	Lien entre un développement limité à l'ordre 1 et la valeur de la dérivée. Pas de résultat au programme pour la composition.
Utilisation de la formule de TAYLOR-YOUNG pour obtenir des développements limités.	
Développements limités à tout ordre en 0 de fonctions usuelles.	$x \mapsto e^x$; $x \mapsto \ln(1+x)$; $x \mapsto (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$; $x \mapsto \sin(x)$; $x \mapsto \cos(x)$.

3.2.7 Extrema de fonctions à valeurs réelles

On insistera ici sur la différence entre la recherche d'extremum sur un segment et la recherche d'extremum sur un intervalle ouvert.

Toute fonction continue sur un segment admet un maximum et un minimum global sur ce segment.	
Condition nécessaire d'existence d'un extremum local sur un intervalle ouvert : si f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert admettant en a un extremum local alors a est un point critique de f.	Le point x est dit critique pour f si $f'(x) = 0$. Ce résultat tombe en défaut lorsque l'intervalle de définition n'est pas ouvert.
Condition suffisante d'existence d'un extremum local en un point critique pour une fonction de classe C^2 sur un intervalle ouvert : si f est une fonction de classe C^2 sur un intervalle ouvert et si a est un point critique pour f tel que $f''(a) \neq 0$, alors f admet en a un extremum local.	La nature de l'extremum local est donnée par le signe de $f''(a)$. On utilise ici la formule de TAYLOR-YOUNG pour établir le résultat.

3.2.8 Convexité et concavité de fonctions réelles de la variable réelle

Fonctions à valeurs réelles convexes; inégalité de convexité. Fonctions concaves. Interprétation géométrique : position relative de la courbe et de ses cordes, inégalité des pentes.	Une fonction f est convexe sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ si pour tout (x,y) de I^2 et tout λ de $[0,1]$: $f((1-\lambda)x+\lambda y) \leqslant (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)$.
Point dinflexion.	Interprétation géométrique.
Généralisation des inégalités de convexité (concavité).	Si f est convexe sur I, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des points de I et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ des éléments de $\mathbb{R}^+$ de somme 1 alors $f\big(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\big) \leqslant \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$.
Caractérisation de la convexité pour des fonctions de classe C^1 sur un intervalle.	Croissance de la dérivée, position de la courbe par rapport aux tangentes.

Caractérisation de la convexité pour des fonctions de classe C^2 sur un intervalle.	f est convexe sur I si, et seulement si, $f'' \geq 0$ sur I.

3.3 Probabilités sur un univers quelconque

On introduit en seconde période le cadre général du calcul des probabilités. Le calcul des probabilités vu en première période est trop limité pour aborder les problèmes intéressants et autoriser des variables aléatoires non bornées par exemple. Le vocabulaire usuel est proposé, partant de la notion fondamentale d'espace probabilisé (Ω, $\mathcal{A}$, $\mathbb{P}$). Il ne s'agit pas d'étudier les problèmes théoriques sous-jacents à cette axiomatisation mais seulement de pouvoir disposer d'un cadre simple permettant d'effectuer les calculs et les raisonnements nécessaires lors de l'étude de phénomènes où le hasard intervient.

Les problèmes, les exemples, les sujets traités lors de travaux dirigés doivent tenir compte de cet objectif de simplicité. L'utilisation de l'informatique est fortement recommandée pour illustrer les situations probabilistes, pour simuler des variables aléatoires et expérimenter sur des problèmes réels correctement modélisés.

On notera que ce cadre général conduit à des problèmes de convergence (suites, séries, intégrales) et qu'il est important de rappeler, au moment opportun, les résultats du cours d'analyse correspondants.

3.3.1 Espace probabilisé

Le préfixe σ utilisé dans σ-algèbre ou σ-additif renvoie au caractère dénombrable des opérations permises. La lettre σ est utilisée classiquement aussi pour désigner l'écart-type, racine carrée de la variance.

Tribu $\mathcal{A}$ d'événements sur un univers Ω. On fera remarquer aussi que choisir $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ n'est pas nécessairement une bonne solution. Ce choix augmente les contraintes à vérifier pour l'existence de probabilités.	Le terme σ-algèbre est aussi employé. On ajoute à la notion rencontrée dans le cas fini la possibilité de réunir ou d'intersecter une famille dénombrable d'événements. Cela est indispensable pour de nombreuses raisons, par exemple : pour considérer des situations où l'on répète un jeu, sans fixer a priori un nombre maximum de répétitions, pour envisager le comportement asymptotique de probabilités ...
Système complet fini ou dénombrable d'événements.	Famille finie ou dénombrable d'événements deux à deux incompatibles et de réunion égale à Ω.
Tribu engendrée par un système complet fini ou dénombrable d'événements.	Existence admise.
Définition d'espace probabilisé, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.	Une probabilité $\mathbb{P}$ est une application σ-additive de $\mathcal{A}$ vers $\mathbb{R}^+$ qui vérifie $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
Propriété presque sûre.	On parle aussi d'événement quasi-certain. L'adjectif négligeable est utilisé pour le contraire d'une propriété presque sûre, i.e. pour un événement de probabilité 0.

Propriétés de limite monotone : si $(A_k)_{k\geq 1}$ est une suite d'événements croissante (resp décroissante) pour l'inclusion alors $\mathbb{P}(\cup_{k=1}^{+\infty} A_k)$ (resp $\mathbb{P}(\cap_{k=1}^{+\infty}) A_k)$ est égale à $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathbb{P}(A_k)$.

Conséquence immédiate :
pour toute suite d'événements $(B_k)_{k\geq 1}$ on a
$\mathbb{P}(\cap_{k=1}^{+\infty} B_k) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\cap_{k=1}^{n} B_k)$,
$\mathbb{P}(\cup_{k=1}^{+\infty} B_k) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\cup_{k=1}^{n} B_k)$.

Notion de probabilité conditionnelle.
On obtient un nouvel espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_A)$.

On conditionne par un événement A de probabilité non nulle, on parle de probabilité sachant A et on écrit $\mathbb{P}_A$ ou parfois $\mathbb{P}(.\,|A)$.

Formule des probabilités composées, formule des probabilités totales.

Pour la formule des probabilités totales on considère un système complet d'événements en nombre fini ou dénombrable.

Indépendance d'une famille d'événements. Par définition une famille $(A_i)_{i\in I}$ d'événements est indépendante si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $i_1, \ldots, i_n$ éléments distincts de I, $\mathbb{P}(\cap_{j=1}^{n} A_{i_j}) = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_{i_j})$.

Si la famille $(A_i)_{i\in I}$ d'événements est indépendante alors toute sous famille est indépendante. En particulier les événements sont indépendants deux à deux. Attention l'indépendance deux à deux n'implique pas l'indépendance de la famille.

3.3.2 Variables aléatoires, généralités

Par définition une variable aléatoire réelle X est une application de Ω vers $\mathbb{R}$ telle que, pour tout nombre réel a, l'ensemble $\{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \leq a\}$ appartient à la tribu $\mathcal{A}$.

Pour tout intervalle réel I, l'ensemble $\{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \in I\}$ appartient à la tribu $\mathcal{A}$.
Notations : $\{X \leq a\}$, $\{X \in I\}$, $[X \leq a]$, $[X \in I]$.

Par définition la fonction de répartition de X est l'application $F_X : x \in \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{P}(\{X \leq x\})$.
Les trois propriétés essentielles d'une fonction de répartition.

F_X dépend de X et de $\mathbb{P}$, la probabilité considérée sur $(\Omega, \mathcal{A})$.
(1) F_X est croissante et continue à droite sur $\mathbb{R}$.
(2) $\lim\limits_{-\infty} F_X = 0$, $\lim\limits_{+\infty} F_X = 1$.
(3) $\mathbb{P}\{X = a\} = F_X(a) - \lim\limits_{x\to a^-} F_X(x)$,
pour tout a élément de $\mathbb{R}$.

Loi de probabilité $\mathbb{P}_X$ de la variable aléatoire X.

$\mathbb{P}_X$ est définie par $\mathbb{P}_X(I) = \mathbb{P}(\{X \in I\})$, pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$.

La fonction de répartition caractérise la loi d'une variable aléatoire réelle.

Résultat admis.

Les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont dites indépendantes si, pour tout n-uplet $(a_1, \ldots, a_n)$ de réels et tout sous-ensemble J de $[\![1, n]\!]$,

$$\mathbb{P}(\cap_{i\in J}\{X_i \leq a_i\}) = \prod_{i\in J} \mathbb{P}(\{X_i \leq a_i\}).$$

La propriété d'indépendance est équivalente à : pour tous $I_1, \ldots, I_n$ intervalles de $\mathbb{R}$ et pour tout sous-ensemble J de $[\![1, n]\!]$,

$$\mathbb{P}(\cap_{k\in J}\{X_k \in I_k\}) = \prod_{k\in J} \mathbb{P}(\{X_k \in I_k\}).$$

Noter que l'indépendance des X_j implique l'indépendance deux à deux et que la réciproque est fausse.

3.3.3 Variables aléatoires réelles discrètes

X est dite de loi discrète s'il existe S un sous-ensemble fini ou dénombrable de $\mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}\{X \in S\} = 1$.

On peut supprimer les issues ω telles que $X(\omega) \in \overline{S}$, ces issues formant une partie négligeable de Ω. Et éliminer aussi tout élément s de S tel que $\mathbb{P}\{X = s\} = 0$. Alors $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable, car égal à S, et pour tout élément s de S on a $\mathbb{P}\{X = s\} > 0$.

Si X est une variable aléatoire réelle discrète la famille $(\{X = x\})_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements.

La tribu engendrée par ce système complet d'événements est notée $\mathcal{A}_X$ et appelée tribu engendrée par X.

Caractérisation de la loi de X discrète par la donnée des nombres $\mathbb{P}\{X = x\}$, avec $x \in X(\Omega)$.

$X(\Omega)$ est fini ou dénombrable et la somme des nombres $\mathbb{P}\{X = x\}$ vaut 1 (série convergente de somme 1 dans le cas dénombrable).

Variable aléatoire obtenue par composition d'une variable aléatoire réelle discrète X et d'une fonction f de la variable réelle définie sur un domaine contenant $X(\Omega)$, $Y = f \circ X$.

Savoir déterminer la loi de $Y = f \circ X$.
Notation usuelle : on écrit souvent $f(X)$ à la place de $Y = f \circ X$.

3.3.4 Espérance et variance dans le cas discret

Espérance d'une variable aléatoire réelle discrète X : on considère une bijection $\varphi : \mathbb{N} \cap [0, n[\to X(\Omega)$, avec $n = card(X(\Omega))$ ($n = +\infty$ dans le cas $X(\Omega)$ dénombrable). On écrit $x_j = \varphi(j)$ (notation indicielle).
Dans le cas n fini on pose $\mathbb{E}(X) = \sum_{j=0}^{n-1} x_j \mathbb{P}\{X = x_j\}$.
Dans le cas n infini on dit que X admet une espérance quand la série $\sum_j x_j \mathbb{P}\{X = x_j\}$ est absolument convergente ; auquel cas on définit l'espérance par $\mathbb{E}(X) = \sum_{j=0}^{\infty} x_j \mathbb{P}\{X = x_j\}$.

L'espérance de X ne dépend pas de l'indexation $j \mapsto x_j$ choisie de $X(\Omega)$, (cf. séries numériques).

Propriétés de $\mathbb{E}$: positivité, linéarité, croissance.

Résultats admis.

Théorème de transfert : sous réserve d'absolue convergence si $n = +\infty$, $\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{j=0}^{\infty} f(x_j) \mathbb{P}\{X = x_j\}$.

Résultat admis.

Cas d'une transformation affine.

$\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$

Une variable aléatoire réelle d'espérance nulle est dite centrée.

On note $\tilde{X}$ la variable centrée $X - \mathbb{E}(X)$.

Variance d'une variable aléatoire réelle discrète X :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(\tilde{X}^2) = \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X))^2\big).$$

sous réserve d'existence des espérances.
On définit l'écart-type de X par $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

L'existence ne pose pas de problème lorsque $X(\Omega)$ est fini. Dans le cas $X(\Omega)$ dénombrable la variance de X existe si, et seulement si, la série (à termes positifs) $\sum_j x_j^2 \mathbb{P}\{X = x_j\}$ converge.

Formule de Koenig-Hyugens.

$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$.

Transformation affine.

$\mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X)$.

Une variable aléatoire d'espérance nulle et variance 1 est dite centrée réduite.

Si X admet espérance et variance $\mathbb{V}(X) \neq 0$, la variable $X^* = \frac{X-\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

Moment d'ordre r, r entier naturel non nul.

$m_r(X) = \mathbb{E}(X^r)$ sous réserve d'existence.

3.3.5 Lois discrètes infinies usuelles

Loi de POISSON de paramètre λ, $\lambda \in]0, +\infty[$.
Espérance, variance.

$\mathbb{P}\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda}$, pour tout entier naturel k.
Modélisation d'un nombre d'arrivées (guichet).
Notation $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Loi de $X + Y$ si X, Y sont indépendantes et suivent chacune une loi de POISSON.

Loi géométrique de paramètre p, $p \in]0, 1[$.
Espérance, variance.

$\mathbb{P}\{X = k\} = p\,(1-p)^{k-1}$, pour k entier > 0.
Temps d'attente d'un premier succès lors d'une suite indépendante d'épreuves à deux issues (succès avec probabilité p vs échec).
Notation $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

3.3.6 Introduction aux variables à densité

La loi (sous $\mathbb{P}$) de la variable aléatoire réelle X est dite à densité quand F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\overline{E}$ où E est une partie finie de $\mathbb{R}$.
Toute fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^+$ égale à F'_X sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points est appelée une densité de (la loi sous $\mathbb{P}$ de) X.
Une densité f de X vérifie, quels que soient les réels $a \leq b$,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F_X(b) - F_X(a) = \mathbb{P}(a \leq X \leq b).$$

F_X, la fonction de répartition, est continue en tout point et C^1 sauf en un nombre fini de point(s).
Les densités d'une variable aléatoire sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, à valeurs positives, dont l'intégrale sur $]-\infty, +\infty[$ converge et vaut 1. Deux densités de la même variable aléatoire X sont égales sauf en un nombre fini de point(s).
Il est utile de représenter graphiquement densité et fonction de répartition d'une variable à densité.

Transformation affine $Y = aX + b$, $a \in \mathbb{R}^*$.

Densité de Y en fonction d'une densité de X.

Par définition l'espérance d'une variable X à densité f est, sous réserve d'absolue convergence de l'intégrale,

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple de variable à densité n'admettant pas d'espérance.

Transformation affine $Y = aX + b$, $a \in \mathbb{R}^*$.

Espérance de Y.

Lois de variables à densité usuelles

X de loi uniforme sur le segment $[a, b]$. Espérance.

Notation $X \hookrightarrow \mathcal{U}(a, b)$.

X de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Espérance.

Notation $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. Modélisation d'une durée de vie dans un processus continu sans usure (sans mémoire).

X de loi gaussienne de paramètre (a, b) avec $b > 0$. Espérance.

Notation $X \hookrightarrow \mathcal{N}(a, b)$. Elle admet pour densité $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2b\pi}} \exp\left(-\dfrac{(x-a)^2}{2b}\right)$.

Utilisation de tables numériques de valeurs de Φ, fonction de répartition de $\mathcal{N}(0, 1)$.

Les lois gaussiennes sont dites aussi de LAPLACE-GAUSS ou lois normales.

3.3.7 Convergence et approximations

Inégalités

Inégalité de MARKOV pour une variable discrète positive admettant une espérance.

Si X est une variable aléatoire positive admettant une espérance, alors pour tout $\lambda > 0$, $\mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \dfrac{\mathbb{E}(X)}{\lambda}$.

Inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBITCHEV pour une variable discrète positive admettant espérance et variance.

Pour toute variable X admettant espérance et variance, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

Convergence en probabilité

La suite $(X_n)_n$ de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est dite converger en probabilité vers la variable aléatoire Y (définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$) si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\{|Y - X_n| \geq \varepsilon\} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Notation $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$.

Loi faible des grands nombres pour la loi binomiale. Si X_n de loi binomiale de paramètre (n, p) alors $\frac{1}{n}X_n$ converge en probabilité vers p.

Lorsqu'on répète indéfiniment et avec indépendance une épreuve à deux issues, succès avec probabilité p vs échec avec probabilité $q = 1 - p$, le nombre moyen de succès en n épreuves, soit $\frac{1}{n}X_n$, converge en probabilité vers p.

Convergence en loi

La suite $(X_n)_n$ de variables aléatoires est dite converger en loi vers la variable aléatoire Y si, pour tout réel x où F_Y est continue,

$$\lim_{n \to +\infty} F_{X_n}(x) = F_Y(x).$$

Notation $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$.

Cas où les variables X_n, Y sont à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

La convergence en loi équivaut alors à : pour tout entier k, $\mathbb{P}\{X_n = k\} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}\{Y = k\}$.

Si la loi de X_n est binomiale de paramètre (n, p_n) et si $p_n \sim \frac{\lambda}{n}$ alors la suite $(X_n)_n$ converge en loi vers Y de loi de Poisson de paramètre λ.	Le réel λ est supposé strictement positif. Pas d'hypothèse d'indépendance ici.
Théorème de la limite centrée pour une suite de répètitions indépendantes d'une épreuve à deux issues, succès avec probabilité p vs échec avec probabilité $q = 1 - p$.	Si X_n désigne le nombre de succès au cours des n premières épreuves alors la suite de variables aléatoires centrées réduites $(X_n^*)_n$ converge en loi vers la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.
Théorème de la limite centrée pour la loi de Poisson.	Si $X_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n\lambda)$ alors la suite de variables aléatoires centrées réduites $(X_n^*)_n$ converge en loi vers la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

4 Hors période : Algorithmique et utilisation de l'informatique

L'objectif est ici d'initier les élèves à l'algorithmique et à l'utilisation de l'informatique en mathématiques. Quand une situation de classe présente une série de calculs relativement techniques, une séries de calculs qui peut être effectuée plus efficacement à l'aide d'un algorithme, une démarche qui incite à modéliser, particulièrement dans un cadre aléatoire, le recours à l'algorithmique et à l'utilisation de l'informatique devient obligatoire.

Les logiciels utilisés pour cela sont nombreux et l'enseignant peut en présenter plusieurs. Néanmoins, pour simplifier la conception et la correction des problèmes de concours, un seul environnement logiciel est au programme : il s'agit du logiciel Scilab. L'utilisation du logiciel se fait en continuité avec le cours de mathématiques et est suivi d'une mise en œuvre sur ordinateur. Les seules notions exigibles de Scilab sont indiquées ci dessous.

4.1 Éléments d'algorithmique, logiciel

4.1.1 Logiciel Scilab

Constantes prédéfinies %pi %e

Approximations de π et e.
// permet de commenter une commande.

Affectation : nom = expression

L'expression peut être de type numérique, matriciel ou du type chaîne de caractères.

Matrices :

[, , . . . ,] vecteur ligne
[; ; . . . ;] vecteur colonne
[, . . . , ; . . . ; , . . . ,] matrice générale $n \times p$.

Opérations arithmétiques

+	-	⋆	/	^

Les opérations arithmétiques de base s'appliquent aux variables numériques ou matricielles.

Comparaisons - tests

==	>	<	>=	<=	<>

Logiques :

&	|
and	or

Fonctions prédéfinies :
Fonctions numériques usuelles :
log, exp, floor, abs, sqtr, sin, cos.

Toutes ces fonctions peuvent s'appliquer à des variables numériques ou à des matrices élément par élément.

Fonctions matricielles :
Transposée d'une matrice : A' ; rank(A), inv(A), size(A).

Extraction ou modification d'un élément, d'une ligne ou d'une colonne d'une matrice.
On pourra utiliser les fonctions size(A), find dans le cadre de simulations.
Pratique des opérations et des fonctions matricielles dans des situations concrètes.

Fonctions rand, grand.	La fonction grand pourra être utilisée avec les paramètres correspondant aux lois de probabilité présentes dans le programme.

4.1.2 Graphisme en deux dimensions

Courbes repésentative d'une fonction d'une variable. Fonctions de densité, de répartition, histogrammes.	On pourra utiliser les fonctions plot, plot2d, bar, histplot, la fonction linspace(a,b,n) et l'opration ./ .

4.1.3 Programmation d'algorithmes et de fonctions

Structures conditionnelles if . . . then . . . end if . . . then . . . else . . . end	
Structures répétitives for k= . . . : : . . . end while . . . then . . . end	Exemples : $n!$, $\binom{n}{p}$.
Fonctions - arguments - retour de résultats.	Notion de variables locales et globales. Par défaut, les variables créées dans une fonction sont locales.
Fonction d'entrée des données : input().	Saisie au clavier - message indicatif possible.
Fonction de sortie de résultat(s) : disp().	Affichage du contenu d'une variable à l'écran avec commentaire éventuel.

4.2 Savoir-faire exigibles

Algèbre Résolution de systèmes $AX = B$.	
Analyse Calculs de termes d'une suite.	Exploitation graphique des rsultats.
Calculs de valeurs approchées de la limite d'une suite ou de la somme d'une série.	On utilisera des structures répétitives et conditionnelles en exploitant l'étude mathématique. La détermination du rang d'arrêt du calcul résultera directement de l'étude mathématique ou d'un algorithme qui en découle.
Calcul approché de la racine d'une équation du type $f(x) = 0$.	On utilisera différentes méthodes dont certaines résulteront d'une étude mathématique (suites récurrentes, encadrements, dichotomie).
Calcul des valeurs approchées d'une inté grale par la méthode des rectangles.	Application au calcul de la fonction de ré partition d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.
Probabilités Utilisation de la fonction rand pour simuler des expériences aléatoires élémentaires conduisant à une loi usuelle.	Loi binomiale, loi géométrique.

Simulations de phénomènes aléatoires.	Utilisation de la fonction grand. On pourra utiliser une simulation pour comparer expérimentalement une loi $\mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n})$ (n grand) avec la loi de Poisson. On pourra utiliser une simulation pour comparer expérimentalement une loi binomiale avec une loi normale.

Table des matières