On est dans l'ens $\underline{M_n(\mathbb{R})}$.

$0 \notin GL_n(\mathbb{R})$?

Mais $0 \in \overline{GL_n(\mathbb{R})}$

Justifiez-le.

On est dans l'esp $M_n(\mathbb{R})$.

1) $0 \notin GL_n(\mathbb{R})$ car $\det(A) = 0$.

2) On a : $0 \in \overline{GL_n(\mathbb{R})}$ car :

$$\begin{cases} 0 \overset{\text{évident}}{=} \lim\limits_{k \to +\infty} \left(\frac{1}{k} \cdot I_n\right) \\ \forall k \in \mathbb{N}, \ \frac{1}{k} \cdot I_n \in GL_n(\mathbb{R}) \end{cases}$$

Supp que $\begin{cases} \forall n, x_n \in A \\ \lim_n x_n = l \ (l \in E) \end{cases}$

que $l \in A$

Ça donne que A est un $\boxed{\text{fermé}}$

Rappel

Exemple : On est dans l'evn $\mathbb{R}^2$.

$\mathcal{E} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$ (où $0 < a < b$)

Montrer le.

Supp : $\begin{cases} \forall n, (x_n, y_n) \in \mathcal{E} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} (x_n, y_n) = (l_1, l_2) \quad (\in \mathbb{R}^2) \end{cases}$

M. que $(l_1, l_2) \in \mathcal{E}$?

On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{x_n^2}{a^2} + \dfrac{y_n^2}{b^2} = 1$ $\star$

Et $\lim\limits_{n \to +\infty} (x_n, y_n) = (l_1, l_2) \iff \left(\lim\limits_n x_n = l_1 \text{ et } \lim\limits_n y_n = l_2\right)$

On veut M. que $(l_1, l_2) \in \mathcal{E}$, Càd que : $\dfrac{l_1^2}{a^2} + \dfrac{l_2^2}{b^2} = 1$.

$\star \Longrightarrow \dfrac{l_1^2}{a^2} + \dfrac{l_2^2}{b^2} = 1$

$\boxed{\text{CQFD}}$

E evn et $A \subset E$.

1) A <u>dense</u> dans $E \underset{\text{par déf}}{\Longleftrightarrow} \overline{A} = E$

<u>Avec les suites :</u>

A dense dans $E \Longleftrightarrow \left(\forall x \in E, \text{ il existe une suite } (a_n)_n \text{ telle que : } \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = x \text{ et } (\forall n, a_n \in A) \right)$

⚠

<u>Exemple (très classique)</u>

On est dans l'evn $M_n(\mathbb{R})$.

$GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

M. qu'il existe une suite $(A_k)_k$ telle que :

$$\begin{cases} \lim\limits_{k \to +\infty} A_k = A & \star \\ \forall k, \ A_k \in GL_n(\mathbb{R}) & \star\star \end{cases}$$

?

Scanned with CamScanner

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

M. qu'il existe une suite $(A_k)_k$ telle que

$$\begin{cases} \lim\limits_{k \to +\infty} A_k = A & \star \\ \forall k, \ A_k \in GL_n(\mathbb{R}) & \star\star ? \end{cases}$$

On a : $\lim\limits_{k \to +\infty} \underbrace{\left(A + \frac{1}{k} \cdot I_n\right)}_{= A_k} = A \quad \star$

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

M. qu'il existe une suite $(A_k)_k$ telle que :

$$\begin{cases} \lim\limits_{k \to +\infty} A_k = A & \star \\ \forall k, \ A_k \in GL_n(\mathbb{R}) & \star\star ? \end{cases}$$

inversible ?

c.à.d $\overset{?}{\underset{?}{\in}} GL_n(\mathbb{R})$

On a : $\lim\limits_{k \to +\infty} \underbrace{\left(A + \frac{1}{k} \cdot I_n\right)}_{= A_k} = A \quad \star$

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

M. qu'il existe une suite $(A_k)_k$ telle que :

$$\begin{cases} \lim_{k \to +\infty} A_k = A & \star \\ \forall k, \ A_k \in GL_n(\mathbb{R}) & \star\star ? \end{cases}$$

On a : $\lim_{k \to +\infty} \underbrace{\left(A - \frac{1}{k} \cdot I_n\right)}_{= A_k} = A \quad \star$

inversible ?

c.à.d $\overset{?}{\underset{?}{\in}} GL_n(\mathbb{R})$

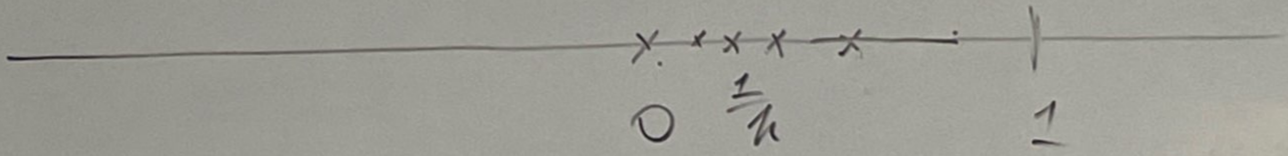
Rappel : (Réduction)

$(A - \lambda . I_n)$ inversible $\Leftrightarrow \lambda \notin Sp(A)$

Scanned with CamScanner

$\left(A - \frac{1}{k} \cdot I_n\right)$ inversible $\Longleftrightarrow$ $\frac{1}{k}$ n'est pas une val propre de A

$$\frac{1}{k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$$



A possède un nombre fini de valeurs propres.

$\lim\limits_{k} \frac{1}{k} = 0$, alors :

$$\left(\exists N \in \mathbb{N},\ \forall k \geq N,\ \frac{1}{k} \notin S_p(A)\right)$$

$$\Longrightarrow \forall k \geq N,\ \left(A - \frac{1}{k} \cdot I_n\right) \text{ inversible}$$

Enfin : $\begin{cases} \forall k \geq N,\ \left(A - \frac{1}{k} \cdot I_n\right) \in GL_n(\mathbb{R}) \\ \lim\limits_{k \to +\infty} \left(A - \frac{1}{k} I_n\right) = A \end{cases}$

D'où $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans l'ens $M_n(\mathbb{R})$

Une sous-suite de $(x_n)_n$ est de la forme :

$$\left(x_{\varphi(n)}\right)_n$$

Une sous-suite de $\left(x_{\varphi(n)}\right)_n$ est de la forme $\left(x_{\varphi(\psi(n))}\right)_n$ Non Pas

$$\cancel{\left(x_{\psi(\varphi(n))}\right)_n}$$

Éclaircissement :

$$x_n = x(n)$$

Sous-suite de $x_n = x_{\varphi(n)} = (x \circ \varphi)(n)$

Sous-suite de $x_{\varphi(n)} = (x \circ \varphi)(n)$ et $(x \circ \varphi \circ \psi)(n)$

$$\downarrow$$

$$x_{\varphi(\psi(n))}$$

right

E evn et $K \subset E$

K Compact $\Longleftrightarrow$ $\left(\begin{array}{l} \text{Si } (x_n)_n \in K^{\mathbb{N}}. \\ \text{Il existe une sous-suite } (x_{\varphi(n)})_n \\ \text{telle que } \lim_{n \to +\infty} x_{\varphi(n)} = l \in K \end{array} \right)$

Définition

Question :

Supp K cpct.

M. que K fermé ? (via les suites).

Scanned with CamScanner

E evn et $K \subset E$

K compact $\Leftrightarrow$ $\left(\begin{array}{l} \text{Si } (x_n)_n \in K^{\mathbb{N}}. \\ \text{Il existe une sous-suite } (x_{\varphi(n)})_n \\ \text{telle que } \lim\limits_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = l \in K \end{array} \right)$

Définition

Question :

Supp K cpct.
M. que K fermé ? (via les suites).

Supp : $\begin{cases} (x_n)_n \in K^{\mathbb{N}} \\ \lim\limits_n x_n = l \ (l \in E) \end{cases}$

M. que $l \in K$?

On a K cpct et $(x_n)_n \in K^{\mathbb{N}}$

$\Rightarrow \exists (x_{\varphi(n)})$ t.q $\lim\limits_n x_{\varphi(n)} \in K$

Or $\lim\limits_n x_n = l$ alors $\lim\limits_n x_{\varphi(n)} = l \Rightarrow \boxed{l \in K}$

f Continue en a $\Longleftrightarrow$ $\left(\begin{array}{l} \text{Si } x_n \xrightarrow[n]{} a \\ \text{Alors } f(x_n) \xrightarrow[n]{} f(a) \end{array} \right)$

Caract seq continuité

Scanned with CamScanner

f Continue en a $\Longleftrightarrow$ $\left(\begin{array}{l} \text{Si } x_n \xrightarrow[n]{} a \\ \text{Alors } f(x_n) \xrightarrow[n]{} f(a) \end{array} \right)$

Caract seq continuité

Ex classique :

$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

M que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.

Rappel : $A \subset \mathbb{R}$. On a

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Sol :

Soit $a \in \mathbb{R}$.

-que $1_{\mathbb{Q}}$ n'est pas continue en a

NB :

Pour m.q. f n'est pas continue en a :

Il suffit de trouver une suite (x_n) t.q. :

$$\begin{cases} x_n \xrightarrow[n]{} a \\ \text{mais} \\ f(x_n) \underset{n}{\not\longrightarrow} f(a) \end{cases}$$

Sol :

Soit $a \in \mathbb{R}$.

Mq $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est pas continue en a

Rappels : $\boxed{\mathbb{Q} \text{ et } (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \text{ sont denses dans } \mathbb{R}}$

Supp par exemple que $a \notin \mathbb{Q}$ (Même démo si $a \in \mathbb{Q}$)

Il suffit de trouver une suite $(x_n)_n$ telle que :

$$\begin{cases} \lim_n x_n = a \\ \lim_n \overbrace{\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x_n)}^{=1} \neq \overset{0}{\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(a)} \end{cases}$$

On a $1_{\mathbb{Q}}(a) = 0$ car $a \notin \mathbb{Q}$.

On a que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

et $a \in \mathbb{R}$

Alors il existe une suite $(x_n)_n$

à valeurs dans $\mathbb{Q}$ telle que $\lim_n x_n = a$

Ainsi : $\begin{cases} \lim_n x_n = a \\ \lim_n \underbrace{1_{\mathbb{Q}}(x_n)}_{=1} = 1 \neq 1_{\mathbb{Q}}(a). \end{cases}$

Enfin, $1_{\mathbb{Q}}$ n'est pas continue en a.

$\square$

$\boxed{2^{\text{ème}} \text{ piste}}$

$a \in \mathbb{R}$.

Mq $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est pas continue en a

Par l'absurde.

Supp que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ continue en a.

$\mathbb{Q}$ dense dans $\mathbb{R} \Rightarrow \exists (x_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}, \lim\limits_{n} x_n = a$

$(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ dense dans $\mathbb{R} \Rightarrow \exists (y_n) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^{\mathbb{N}}, \lim\limits_{n} y_n = a$

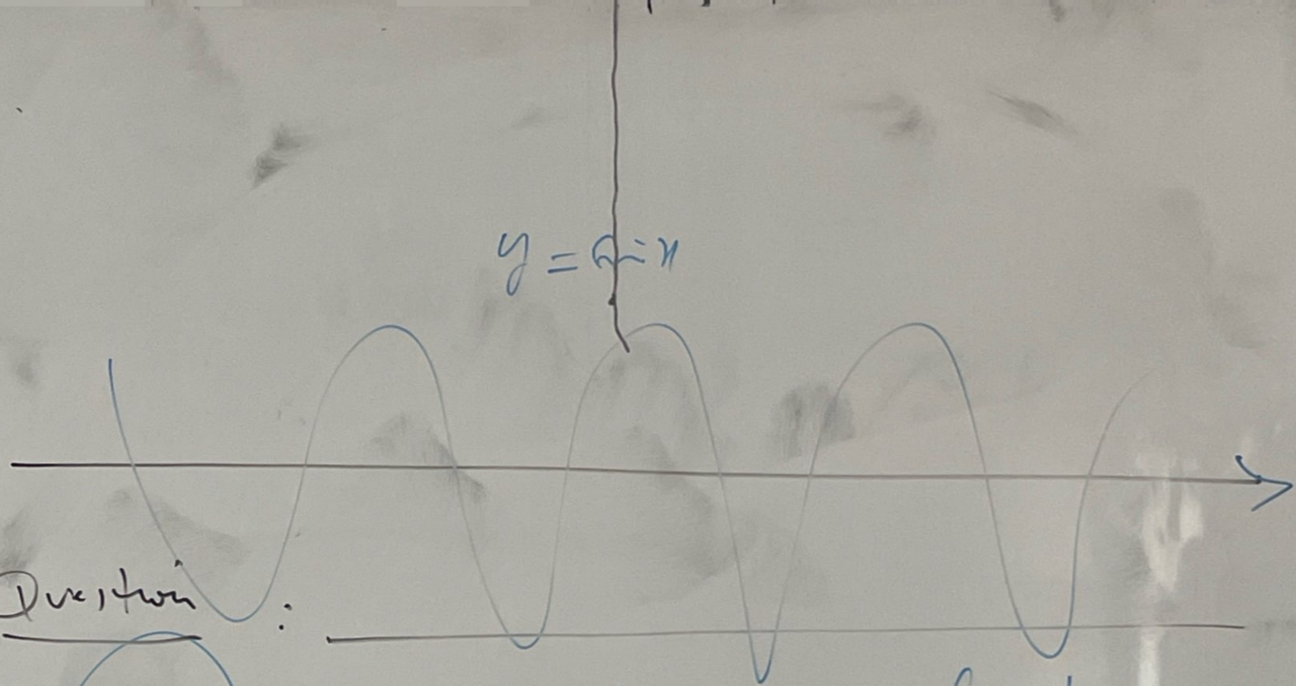
Et comme a, vu que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ continue en a,

alors : $\begin{cases} \lim\limits_{n} \underbrace{\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x_n)}_{=1} = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(a) \\ \lim\limits_{n} \underbrace{\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(y_n)}_{=0} = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(a) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(a) = 1 \\ \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(a) = 0 \end{cases}$ $\boxed{\text{absurde}}$

$$\lim_{k} A_k = A \Rightarrow \lim_{k} \det(A_k) = \det(A)$$

Ça traduit que la fonction det est <u>continue</u> en A



Question :

. que sin n'a pas de limite quand x tend vers $+\infty$.

Sol (Bref)

$$x_n = n\pi \longrightarrow +\infty$$

$$y_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \longrightarrow +\infty$$

$$\sin(x_n) = 0 \longrightarrow 0$$

$$\sin(y_n) = 1 \longrightarrow 1$$

$\neq$

Idem :

Cos et sin en $\pm \infty$

Démo : à développer chez vous

Scanned with CamScanner