

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière MP,
comporte 3 pages.
L'usage de tout matériel électronique, y compris la calculatrice, est interdit

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Ce sujet est composé d'un exercice et d'un problème indépendants à traiter dans l'ordre souhaité.

Exercice

Construction d'une base orthonormée d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ (Noté sur 4 points sur 20)

Dans cet exercice, $\mathbb{R}$ désigne le corps des nombres réels et n un entier naturel, avec $n \geq 2$. On munit le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique noté $(\cdot, \cdot)$ et on note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$; pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$, on pose $v_k = e_k - e_{k+1}$.

On note H la partie de $\mathbb{R}^n$ définie par : $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; x_1 + \dots + x_n = 0\}$.

0.1. Structure de H

On considère l'application $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 + \dots + x_n = \sum_{k=1}^n x_k$.

0.1.1. Vérifier que ψ est une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R}^n$.

0.1.2. En déduire que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et déterminer sa dimension.

0.2. Montrer que la famille $(v_1, \dots, v_{n-1})$ est une base de H .

0.3. Construction d'une base orthogonale de H

Pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$, on pose $F_k = \text{Vect}(v_1, \dots, v_k)$ et on note p_k la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel F_k .

0.3.1. Montrer que, pour tout $(j, k) \in \{1, \dots, n-1\}^2$, $(v_j | v_k) = \begin{cases} -1 & \text{si } k \in \{j-1, j+1\}, \\ 2 & \text{si } k = j, \\ 0 & \text{si } k \notin \{j-1, j, j+1\}. \end{cases}$

0.3.2. Considérons la famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})$ définie par

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = v_1 \\ \forall k \in \{2, \dots, n-1\}, \varepsilon_k = v_k - p_{k-1}(v_k) \end{cases}$$

Montrer que

- i) $\forall k \in \{1, \dots, n-1\}, \text{vect}(v_1, \dots, v_k) = \text{vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$
- ii) $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})$ est une famille orthogonale de H .

0.3.3. Détermination de ε_k pour $k \in \{2, \dots, n-1\}$

Soit $k \in \{2, \dots, n-1\}$; on pose $\varepsilon_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j v_j$.

(i) Montrer que $(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1})$ est solution du système linéaire $A_k X = B_k$, où $A_k = ((v_j | v_\ell))_{1 \leq j, \ell \leq k-1}$ est la matrice de Gram associée à la famille $(v_1, \dots, v_{k-1})$, et B_k désigne le vecteur colonne de composantes $(v_1 | v_k), \dots, (v_{k-1} | v_k)$.

(ii) Montrer que le système $A_k X = B_k$ s'écrit $\begin{cases} 2x_1 - x_2 & = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 & = 0 \\ \vdots & \\ -x_{k-3} + 2x_{k-2} - x_{k-1} & = 0 \\ -x_{k-2} + 2x_{k-1} & = -1 \end{cases}$.

(iii) Résoudre le système $A_k X = B_k$ et en déduire que $\varepsilon_k = (\frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k}, -1, 0, \dots, 0)$, le -1 étant situé à la $(k+1)$ -ième place.

0.4. Donner une base orthonormée de H .

EXTRAIT

NB : J'ai modifié l'énoncé de la question marquée en bleu.