Programme de mathématiques de la classe préparatoire PSI

1 Préambule

1.1 Objectifs généraux de formation

L'enseignement des mathématiques dans la filière Physique et Sciences Industrielles (PSI) a pour vocation d'apporter les connaissances fondamentales et les savoir-faire indispensables à la formation générale des scientifiques, qu'ils soient ingénieurs, enseignants ou chercheurs ; il développe les aptitudes et les capacités des élèves selon les axes majeurs suivants :

- l'acquisition de connaissances et la maîtrise de techniques usuelles ;
- le développement simultané du sens de la rigueur et du goût du concret ;
- l'éveil de la curiosité intellectuelle et le développement de l'esprit critique, de recherche et de synthèse ;
- le développement de l'initiative, de l'autonomie et des capacités d'expression et de communication.

Son objectif est double. D'une part, il permet de développer des concepts, des résultats, des méthodes et une démarche spécifiques aux mathématiques. D'autre part, il contribue à fournir un langage, des représentations et des méthodes dont les autres disciplines scientifiques étudiées dans ces classes et au-delà, comme la physique, la chimie, l'informatique et les sciences industrielles, sont demandeuses ou utilisatrices.

Une formation mathématique de qualité doit développer non seulement la capacité à acquérir des connaissances et à les appliquer à des problèmes préalablement répertoriés, mais aussi l'aptitude à étudier des problèmes plus globaux ou des questions issues de situations réelles. Certaines situations nécessitent la conception d'outils nouveaux pour les traiter. Ainsi, la réflexion sur les concepts et les méthodes, la pratique du raisonnement et de la démarche mathématique constituent des objectifs majeurs.

Il est attendu que la pratique du raisonnement mathématique à travers les notions étudiées dans le cadre de ce programme concourt à la formation de l'esprit des élèves : la rigueur du raisonnement, l'esprit critique, l'analyse et le contrôle des hypothèses et des résultats obtenus et leur pertinence au regard du problème posé, le sens de l'observation et celui de la déduction trouvent en mathématiques un champ d'action où ils seront cultivés de manière spécifique.

Pour aider les élèves à effectuer la synthèse des connaissances acquises dans les différents domaines qu'ils ont étudié, il est souhaitable de mettre en lumière les interactions des champs de connaissance. La concertation entre les enseignants par classe, discipline ou cycle peut y contribuer efficacement ; la cohérence et une organisation coordonnée entre les diverses disciplines est fondamentale. Il importe d'éviter les redondances tout en soulignant les points communs, de limiter les divergences ou ambiguïtés dues à la diversité des points de vue possibles sur un même objet tout en enrichissant l'enseignement par cette même diversité.

Les élèves doivent aussi être entraînés à l'utilisation en mathématiques d'un logiciel de calcul scientifique pour la résolution de problèmes, la formulation de conjectures ou la représentation graphique de résultats. L'utilisation de ce logiciel, en libérant les élèves des aspects calculatoires ou techniques (calcul, dessin, représentation graphique), leur permet de se concentrer sur la démarche. Les concepts mathématiques sous-jacents sont mis en avant et l'interprétation des résultats obtenus est facilitée. L'étude de situations complexes hors de portée des techniques traditionnelles devient possible.

Concernant les capacités d'expression et de communication, cela suppose, à l'écrit, la capacité à comprendre les énoncés mathématiques, à mettre au point un raisonnement et à rédiger une démonstration et, à l'oral, celle de présenter de manière claire et synthétique une démarche ou une production mathématique. Les travaux individuels ou en équipe proposés aux élèves en dehors du temps d'enseignement (devoirs libres, interrogations orales, comptes rendus de travaux dirigés ou d'interrogations orales, exposés) contribuent de manière efficace à développer ces compétences. La communication utilise des moyens diversifiés auxquels il convient de familiariser les élèves : cela concerne non seulement le tableau, dont la maîtrise est un élément essentiel, mais aussi les dispositifs de projection appropriés (rétroprojecteur, vidéoprojecteur) et l'outil informatique.

Il est aussi souhaitable que le contenu culturel des mathématiques ne soit pas sacrifié au profit de la seule technicité. En particulier, les textes et les références historiques rendent compte des interactions entre les problèmes mathématiques et la construction des concepts, mettent en évidence le rôle central joué par le questionnement scientifique pour le développement théorique. Ils montrent en outre que les sciences, et les mathématiques en particulier, sont en perpétuelle évolution et que le dogmatisme n'est pas la référence en la matière. Dans ce sens, il pourra s'avérer pertinent d'analyser l'interaction entre problèmes et outils conceptuels ; les seconds sont développés pour résoudre les premiers mais deviennent à leur tour, et aux mains des mathématiciens, des objets d'étude qui posent de nouveaux problèmes et peuvent ultérieurement servir au traitement d'autres classes de problèmes.

On attachera une importance à l'aspect géométrique des notions et propriétés étudiées en ayant régulièrement recours à des figures et croquis, ce qui permet de développer une vision géométrique des objets abstraits et favorise de fructueux transferts d'intuition.

1.2 Organisation du texte du programme

Le programme de la classe de deuxième année PSI est présenté en deux grandes parties, chacune d'elles correspondant à une période. Chacune de ces parties définit un corpus de connaissances requises et de capacités attendues.

Le programme définit les objectifs de l'enseignement et décrit les connaissances et les capacités exigibles des élèves ; il précise aussi certains points de terminologie, certaines notations ainsi que des limites à respecter. À l'intérieur de chaque période, le programme est décliné en chapitres (numérotés 1, 2, ...). Chaque chapitre comporte un bandeau et un texte présenté en deux colonnes : à gauche figurent les contenus du programme et à droite les commentaires.

- le bandeau définit les objectifs essentiels et les capacités attendues des élèves, et délimite le cadre d'étude des notions qui lui sont relatives. Il décrit parfois sommairement les notions qui y sont étudiées ;
- les contenus fixent les connaissances, les résultats et les méthodes figurant au programme ;
- les commentaires donnent des informations sur les capacités attendues des élèves. Ils indiquent des repères et proposent des notations. Ils précisent le sens ou les limites de certaines notions ; les énoncés de certaines définitions ou de certains résultats y sont parfois intégralement explicités, l'objectif étant ici d'unifier les pratiques des enseignants.

La chronologie retenue dans la présentation des différents chapitres de chaque période ne doit pas être interprétée comme un modèle de progression. Cependant, la progression retenue par chaque professeur au cours de chaque période doit respecter les objectifs de l'enseignement dispensé au cours de cette période.

1.3 Contenu du programme

Le programme définit un corpus de connaissances requises et de capacités attendues, et explicite des aptitudes et des compétences qu'une activité mathématique bien conçue est amenée à développer. L'acquisition de ce socle par les élèves constitue un objectif prioritaire pour le professeur.

Il permet à tous les élèves d'acquérir progressivement le niveau requis pour la poursuite des enseignements dispensés dans les grandes écoles, et plus généralement les poursuites d'études dans différents établissements de l'enseignement supérieur ; il leur permet également de se réorienter et de se former tout au long de leur parcours.

Le programme porte essentiellement sur l'algèbre linéaire, l'analyse et les probabilités. L'étude de chacun de ces trois domaines permet de développer des aptitudes au raisonnement et à la modélisation, et d'établir des liens avec d'autres disciplines.

Le programme d'algèbre linéaire prolonge l'étude abordée en classe de première année PCSI et aboutit à la réduction des endomorphismes et des matrices ; cette étude est basée sur les notions de sous-espace stable et de polynôme d'endomorphisme ; les principaux résultats y sont formulés en termes d'éléments propres et de polynômes annulateurs. Le reste du programme, consacré aux espaces préhilbertiens réels, prolonge l'étude de ces espaces déjà abordée en PCSI et aboutit, en dimension finie, à la réduction, en base orthonormale, des endomorphismes symétriques (théorème spectral) ; cette étude met l'accent sur les relations entre les registres vectoriel, matriciel et géométrique.

En analyse, le programme introduit le concept d'espace vectoriel normé, ce qui permet d'aborder le calcul différentiel et fournit un cadre cohérent pour l'étude des suites, des séries et des fonctions et celle des suites et des séries de fonctions. L'intégration, la représentation des fonctions, notamment par des séries entières et par des intégrales dépendant d'un paramètre, l'approximation des fonctions, l'étude du calcul différentiel et des équations différentielles linéaires tiennent une place majeure. Le programme comporte aussi une introduction aux fonctions holomorphes.

Le chapitre relatif aux fonctions vectorielles permet la généralisation aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ des résultats d'analyse réelle étudiés en première année ; on y aborde aussi une étude modeste des arcs paramétrés. Il favorise les interprétations et les représentations géométriques des objets étudiés, et fournit une occasion de relier les registres analytique et géométrique.

L'étude des suites et séries de fonctions et des différents modes de leur convergence conduit aux théorèmes de régularité de leur limite ou somme. Les séries entières permettent de construire des fonctions de variable complexe et de fournir des outils pour la résolution d'équations différentielles linéaires et pour l'étude des fonctions holomorphes.

Les théorèmes classiques sur l'intégration des suites et séries de fonctions et sur les intégrales à paramètre sont étudiés dans un seul chapitre ; ils fournissent les outils nécessaires pour mener l'étude d'une fonction définie comme intégrale dépendant d'un paramètre.

L'étude des équations et des systèmes différentiels linéaires, dont les interventions sont fréquentes tant en mathématiques que dans les autres disciplines scientifiques, est basée sur le théorème de Cauchy qui permet d'établir la structure de l'ensemble des solutions, illustrant la pertinence des outils de l'algèbre linéaire pour résoudre des problèmes de l'analyse. Le cas particulier où les coefficients sont constants permet notamment de mettre en œuvre des techniques de réduction.

L'enseignement des probabilités présente brièvement le formalisme de Kolmogorov qui sera repris et approfondi dans le cursus post classes préparatoires. Son objectif majeur est l'étude des variables aléatoires discrètes et celle des variables à densité, ce qui permet d'élargir le champ des situations réelles se prêtant à une modélisation probabiliste.

On y étudie les bases de la théorie des probabilités : variables aléatoires, lois usuelles, notions d'indépendance et de probabilités conditionnelles, notions de moments et de fonctions génératrices ; ce chapitre débouche sur des résultats d'approximation (loi faible des grands nombres, théorème de la limite centrée). La loi faible des grands nombres permet de justifier a posteriori l'approche fréquentiste d'une probabilité pour un schéma de Bernoulli. L'inégalité qui la sous-tend (inégalité de Bienaymé-Tchebychev) précise la vitesse de convergence de cette approximation et valide l'interprétation de la variance comme indicateur de dispersion. Ce chapitre a vocation à interagir avec le reste du programme, notamment en exploitant les séries génératrices et l'intégration sur un intervalle quelconque.

Afin de contribuer au développement des compétences de modélisation et de représentation, le programme préconise le recours à des figures géométriques pour aborder l'algèbre linéaire, les espaces préhilbertiens, les fonctions de variable réelle ou vectorielle.

Le programme encourage la démarche algorithmique et le recours à l'outil informatique (calculatrices, logiciels) ; il intègre la construction et la mise en forme d'algorithmes et, sur des exemples, la comparaison de leurs performances.

1.4 Organisation temporelle de la formation

Le programme de la classe de deuxième année PSI est présenté en deux grandes parties, chacune d'elles correspondant à une période. Le programme de la première période est étudié complètement en premier lieu, lors des quatre premiers mois de l'année ; celui de la deuxième période est ensuite abordé. Le programme doit être traité en veillant à alterner, de préférence, des chapitres d'analyse, de probabilité, d'algèbre et de géométrie euclidienne.

1.5 Recommandations pédagogiques pour le choix d'une progression

Le programme est présenté en deux grandes parties, mais son organisation n'est pas un plan de cours ; il va de soi que cette présentation n'est qu'une commodité de rédaction et ne doit pas faire oublier les interactions nombreuses et étroites entre les différents domaines des mathématiques.

Les chapitres qui composent le programme suivent un ordre thématique qui n'est d'ailleurs pas le seul possible. Cette organisation a pour objet de présenter les différentes notions du programme de mathématiques et ne peut en aucun cas être considéré comme une progression de cours.

Chaque professeur adopte librement la progression qu'il juge adaptée au niveau de sa classe et conduit l'organisation de son enseignement dans le respect de la cohérence de la formation globale. Il choisit ses méthodes et ses problématiques en privilégiant la mise en activité¹ des élèves et en évitant tout dogmatisme. En effet l'acquisition des connaissances et des capacités est d'autant plus efficace que les élèves sont acteurs de leur formation. Le contexte d'enseignement retenu doit motiver les élèves, favoriser l'acquisition des connaissances et permettre le développement de leurs compétences et capacités.

En contrepartie de cette liberté dans l'organisation de la progression, le respect des **objectifs de formation et son étalement dans l'année**, comme indiqués ci-dessus, reste une nécessité incontournable.

1. "Tell me and I forget, teach me and I may remember, involve me and I learn." BENJAMIN FRANKLIN (« Dis-moi et j'oublie, enseigne-moi et je peux me rappeler, implique-moi et j'apprends. »)

2 Première période

2.1 Rappels et compléments sur les espaces vectoriels, les endomorphismes et les matrices

Ce chapitre a un triple objectif :

- consolider et approfondir les acquis de la classe de première année PCSI relatifs à l'étude des concepts fondamentaux de l'algèbre linéaire notamment en dimension finie ;
- étudier de nouveaux concepts : somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels, sous-espaces stables, polynômes d'endomorphismes et de matrices, trace, formes linéaires, hyperplans ;
- exploiter les articulations entre le point de vue géométrique et le point de vue matriciel, et les apports du passage d'un point de vue à un autre.

Le programme valorise les interprétations et les illustrations géométriques des notions et des résultats étudiés, ce qui permet de développer une visualisation des objets abstraits et favorise de fructueux transferts d'intuition. On attachera ici une importance à cet aspect en ayant recours à de nombreuses figures.

Il est attendu qu'à l'issue de ce chapitre, les élèves

- maîtrisent l'algèbre linéaire en dimension finie et, notamment, l'articulation entre le point de vue géométrique (vecteurs et applications linéaires) et le point de vue matriciel ;
- soient capables d'exploiter les résultats obtenus pour l'étude de problèmes issus de l'algèbre (systèmes linéaires, polynômes, interpolation, équations aux différences finies), de l'analyse (récurrences linéaires et équations différentielles linéaires) et de la géométrie.

Dans ce chapitre, E désigne un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel où le corps de base $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.1.1 Produit et somme d'espaces vectoriels

Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels ; dimension dans le cas où ces espaces sont de dimension finie.

Somme d'une famille finie de sous-espaces vectoriels ; famille finie de sous-espaces vectoriels en somme directe ; sous-espaces supplémentaires.

Base d'un espace vectoriel E , de dimension finie, adaptée à une décomposition en somme directe $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_r$ d'une famille finie $F_1, \dots, F_r$ de sous-espaces vectoriels de E .

Caractérisation par la dimension d'une somme directe finie de sous-espaces vectoriels de dimension finie.

Si $E_1, \dots, E_r$ sont des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_r$ et si $u_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$ pour tout i , alors il existe une et une seule application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $u|_{E_i} = u_i$ pour tout i .

Caractérisation d'une somme directe par l'unicité de la décomposition du vecteur nul.

Décomposition en somme directe obtenue par fractionnement d'une base.

Si $F_1, \dots, F_r$ sont des sous-espaces vectoriels de dimension finie, alors le sous-espace vectoriel $\sum_{i=1}^r F_i$ est de dimension finie et on a $\dim \left(\sum_{i=1}^r F_i \right) \leq \sum_{i=1}^r \dim(F_i)$, avec égalité si, et seulement si, la somme est directe.

Définition de la famille $p_1, \dots, p_r$ des projecteurs associés à la décomposition $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_r$.

Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et si G est un supplémentaire de $\text{Ker } u$ dans E , alors u induit un isomorphisme de G sur $\text{Im } u$.

2.1.2 Formes linéaires et hyperplans

Formes linéaires sur un espace vectoriel.

Deux formes linéaires ayant le même noyau sont proportionnelles.

Hyperplan d'un espace vectoriel.

Si H est un hyperplan de E , alors pour toute droite D non contenue dans H , $E = H \oplus D$.

Un sous-espace vectoriel H de E est un hyperplan si, et seulement si, H est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E ; équations d'un hyperplan dans une base.

En dimension n , les hyperplans sont exactement les sous-espaces de dimension $n - 1$.

L'étude de la dualité est hors programme.

Si φ est une forme linéaire non nulle sur E , toute forme linéaire nulle sur $\text{ker } \varphi$ est colinéaire à φ . Défini comme admettant pour supplémentaire une droite vectorielle.

Exemples des droites et des plans en dimension deux et trois.

2.1.3 Matrices et endomorphismes

Matrices définies par blocs, opérations.

Matrices semblables. Interprétation en termes d'endomorphisme.

Trace d'une matrice carrée; linéarité de la trace, trace d'une transposée, relation $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.

Invariance de la trace par similitude : deux matrices carrées semblables ont la même trace.

Trace d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie; la trace d'un projecteur est égale à son rang.

Polynôme d'une matrice carrée, d'un endomorphisme. Polynôme annulateur.

Sous-espace F stable par un endomorphisme u de E ; endomorphisme u_F de F induit par u .

Somme et produit par blocs.

Les élèves doivent savoir utiliser l'endomorphisme canoniquement associé à une matrice carrée.

La notion de matrices équivalentes et l'étude des classes de similitude sont hors programme

Applications au calcul de l'inverse et des puissances.

La notion de polynôme minimal est hors programme.

En dimension finie, traduction de la stabilité d'un sous-espace F par un endomorphisme u à l'aide de la matrice de u dans une base de E adaptée à F .

Somme et intersection de sous-espaces stables par u . En dimension finie, caractérisation des endomorphismes stabilisant des sous-espaces vectoriels $F_1, \dots, F_r$ de E tels que $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_r$ par leur matrice dans une base de E adaptée à cette décomposition.

Si deux endomorphismes u et v commutent, $\text{Ker } u$ et $\text{Im } u$ sont stables par v .

Rappels sur les déterminants; exemples de calculs.

Les élèves doivent savoir interpréter en termes d'endomorphismes une matrice triangulaire ou diagonale par blocs.

En particulier, si $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, les endomorphismes $P(u)$ et $Q(u)$ commutent donc le noyau et l'image de l'un sont stables par l'autre.

Les élèves doivent savoir calculer le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs, et connaître l'expression d'un déterminant de Vandermonde.

2.2 Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Ce chapitre a un double objectif :

- approfondir les notions étudiées en première année PCSI et étudier la réduction des endomorphismes et des matrices;
- exploiter les résultats obtenus pour l'étude de problèmes issus de l'algèbre, de l'analyse et de la géométrie.

Les méthodes qui y sont présentées sont de deux types : les unes, de nature géométrique, reposent sur les notions de sous-espace stable et d'éléments propres; les autres, de nature algébrique, font appel aux polynômes annulateurs.

Il est attendu qu'à l'issue de ce chapitre, les élèves

- acquièrent les notions de base sur la réduction des endomorphismes et des matrices (éléments propres, sous-espace stable, critères de réduction reposant sur les sous-espaces propres ou les polynômes annulateurs);
- puissent mettre en œuvre ces notions pour mener l'étude, dans des cas standard, de la diagonalisation et de la trigonalisation des matrices et des endomorphismes, en dimension finie;
- soient capables d'exploiter les résultats obtenus pour l'étude de problèmes issus de l'algèbre, de l'analyse (recherche des solutions d'une récurrence linéaire à coefficients constants, étude et résolution d'équations différentielles linéaires) et de la géométrie (étude des isométries et des endomorphismes symétriques d'un espace euclidien).

Dans ce chapitre, E désigne un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel où le corps de base $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.2.1 Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

Droite stable par un endomorphisme. Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre.

Un vecteur propre est non nul.

Les élèves doivent savoir que si deux endomorphismes u et v commutent, les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre.

Si $u(x) = \lambda x$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$.

Le spectre d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie est l'ensemble de ses valeurs propres. La somme d'une famille finie de sous-espaces propres est directe.

Le spectre d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie n est fini de cardinal au plus n .

Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres et spectre d'une matrice carrée.

Si P est un polynôme annulateur de u , toute valeur propre de u est racine de P .

Notation $\text{Sp}(u)$. La notion de valeur spectrale est hors programme.

Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre.

Équation aux éléments propres $MX = \lambda X$.

Deux matrices semblables ont même spectre.

2.2.2 Polynôme caractéristique

Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

Les racines du polynôme caractéristique dans le corps de base sont les valeurs propres. Multiplicité d'une valeur propre.

Si le polynôme caractéristique χ_u (resp. χ_A) est scindé, la somme et le produit des valeurs propres de u (resp. A), comptées avec leur multiplicité, sont respectivement égaux à la trace et au déterminant de u (resp. A).

Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire par blocs. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit par u sur un sous-espace vectoriel F stable par u ; χ_{u_F} divise χ_u .

Théorème de Cayley-Hamilton.

Une matrice et sa transposée ont même polynôme caractéristique; le polynôme caractéristique est un invariant de similitude.

Notations χ_u, χ_A .

Le polynôme caractéristique est unitaire; valeurs des coefficients des monômes de degrés 0 et $n - 1$ dans χ_u, χ_A .

Le sous-espace propre associé à une valeur propre λ est de dimension inférieure ou égale à la multiplicité de λ .

Démonstration non exigible.

2.2.3 Endomorphismes et matrices carrées diagonalisables

Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale.

Pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable, il faut et il suffit que la somme de ses sous-espaces propres soit égale à E .

Une matrice carrée est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

Pour qu'une matrice carrée soit diagonalisable, il faut et il suffit que l'endomorphisme canoniquement associé soit diagonalisable.

Une telle base est constituée de vecteurs propres.

Cas des projecteurs, des symétries.

Dans la pratique des cas numériques, on se limite à $n = 2$ ou $n = 3$.

Pour qu'un endomorphisme u soit diagonalisable, il faut et il suffit que χ_u soit scindé sur le corps de base $\mathbb{K}$ et que, pour toute valeur propre de u , la dimension de l'espace propre associé soit égale à sa multiplicité (comme racine de χ_u).

Un endomorphisme d'un espace de dimension n admettant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.

Application de la diagonalisation :

- au calcul des puissances d'une matrice diagonalisable.

- à la résolution des récurrences linéaires à coefficients constants.

Traduction matricielle.

Traduction matricielle.

Les élèves doivent savoir traduire matriciellement une relation de récurrence linéaire.

2.2.4 Endomorphismes et matrices carrées trigonalisables

Un endomorphisme est dit trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure.

Une matrice carrée est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure. Pour qu'une matrice carrée soit trigonalisable, il faut et il suffit que l'endomorphisme canoniquement associé le soit.

Un endomorphisme est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé sur le corps de base $\mathbb{K}$.

En particulier, toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

Interprétation géométrique.

La technique générale de trigonalisation n'est pas au programme. On se limitera dans la pratique à des exemples simples en petite dimension et tout exercice de trigonalisation effective doit comporter une indication.

Démonstration non exigible.

Interprétation dans le registre matriciel.

Expression de la trace et du déterminant d'un endomorphisme trigonalisable, d'une matrice trigonalisable à l'aide des valeurs propres.

2.2.5 Application à la diagonalisation de la notion de polynôme annulateur

Décomposition spectrale d'un endomorphisme diagonalisable u dont les sous-espaces propres sont $F_1, \dots, F_r$: $u = \lambda_1 p_1 + \dots + \lambda_r p_r$; pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(u) = P(\lambda_1)p_1 + \dots + P(\lambda_r)p_r$.

Un endomorphisme u est diagonalisable si, et seulement si, il existe un polynôme scindé, sur le corps de base $\mathbb{K}$, à racines simples annihilant u .

Un endomorphisme u est diagonalisable si, et seulement si, le polynôme $\prod_{\lambda \in Sp(u)} (X - \lambda)$ est annulateur de u .

$(p_1, \dots, p_r)$ désignant la famille des projecteurs associés à la décomposition $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_r$.

Démonstration non exigible.

Interprétation de ce résultat dans le registre matriciel.

Le théorème de décomposition des noyaux est hors programme.

Traduction matricielle.

L'endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace vectoriel stable est diagonalisable

2.3 Topologie des espaces normés

Ce chapitre prolonge les notions de limites, de suites, de séries et de fonctions étudiées en première année PCSI; il introduit la topologie des espaces vectoriels normés de dimension finie, ce qui permet de fournir un cadre cohérent pour l'étude de ces notions à un niveau supérieur (suites de matrices, fonctions à valeurs vectorielles, calcul différentiel). Le théorème admis d'équivalence des normes permet de ramener l'étude topologique à celle de l'espace $\mathbb{K}^p$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) qui peut servir de cadre à la présentation des différentes notions (boules, ouverts, limite et continuité, ...).

Ce chapitre prépare également l'introduction de normes sur des espaces fonctionnels afin de fournir un cadre topologique à la convergence des suites et séries de fonctions.

Les concepts étudiés ici se prêtent à des représentations issues de différents registres; dans ce cadre, on tâchera de souligner le contenu géométrique des notions abordées, notamment en ayant recours à de nombreuses figures.

Il est attendu qu'à l'issue de ce chapitre, les élèves

- aient une bonne connaissance des normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$ et sur les espaces de matrices, sachent en établir les propriétés et soient capables de les comparer;*
- acquièrent les notions de base sur l'étude locale d'une suite et d'une fonction, et connaissent les propriétés globales des fonctions continues;*
- sachent exploiter la densité pour établir des relations entre fonctions continues.*

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne l'un des deux corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.3.1 Normes et espaces vectoriels normés

Norme sur un espace vectoriel réel ou complexe. Vecteurs unitaires.

Espaces vectoriels normés.

Distance associée à une norme.

Inégalité triangulaire. Distance à une partie.

Boules fermées, boules ouvertes, sphères.

Parties convexes; convexité des boules.

Parties, suites et fonctions bornées.

Normes usuelles $\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_2$ et $\| \cdot \|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$. Normes usuelles $\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_2$ et $\| \cdot \|_\infty$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

$$\|A\|_1 = \sup_{1 \leq j \leq p} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|, \quad \|A\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^p |a_{i,j}|,$$

$$\|A\|_2 = \left(\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} |a_{i,j}|^2 \right)^{1/2}, \quad A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}).$$

Norme associée à un produit scalaire sur un espace préhilbertien réel.

Produit fini d'espaces vectoriels normés.

Norme produit.

Normes usuelles sur un espace vectoriel de dimension finie muni d'une base.

Deux normes N et N' sont dites équivalentes s'il existe deux réels α et β strictement positifs tels que $N \leq \alpha N'$ et $N' \leq \beta N$. Propriétés invariantes par changement de normes équivalentes.

Théorème de l'équivalence des normes sur un espace vectoriel de dimension finie.

Invariance du caractère borné par passage à une norme équivalente.

Démonstration hors programme.

Illustration sur des normes simples définies sur $\mathbb{K}^p$ et sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

2.3.2 Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

Suite convergente, divergente. Unicité de la limite. Caractère borné d'une suite convergente. Opérations algébriques sur les suites convergentes. Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente.

Invariance de la convergence d'une suite par passage à une norme équivalente.

Cas d'un d'un espace de dimension finie :

Caractérisation de la convergence d'une suite dans un espace de dimension finie à l'aide d'une base.

Exemples de suites de matrices.

Utilisation des suites pour établir que deux normes ne sont pas équivalentes.

Les élèves doivent savoir que la convergence d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.

Théorème de Bolzano-Weierstrass :

De toute suite bornée de nombres réels, on peut extraire une suite convergente dans $\mathbb{R}$.

De toute suite bornée de nombres complexes, on peut extraire une suite convergente dans $\mathbb{C}$.

De toute suite bornée d'éléments d'un espace vectoriel normé de dimension finie E , on peut extraire une suite convergente dans E .

Démonstration non exigible.

Démonstration non exigible.

2.3.3 Topologie d'un espace vectoriel normé de dimension finie

L'étude topologique d'un espace normé de dimension finie E se ramène à celle de $\mathbb{K}^p$ muni d'une norme.

Ouvert. Stabilité par réunion quelconque, par intersection finie.

Fermé. Stabilité par intersection quelconque, par réunion finie.

Point intérieur, point adhérent. Intérieur, adhérence, frontière d'une partie.

Caractérisation séquentielle des points adhérents, des fermés.

Partie dense.

Une boule ouverte est un ouvert.

Une boule fermée et une sphère sont fermées.

Ces notions sont illustrées par des figures.

Exemples de parties denses de $\mathbb{K}^p$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

2.3.4 Étude locale, propriétés globales d'une application continue

Limite en un point adhérent à une partie non vide A de E d'une application définie sur A à valeurs dans un espace normé de dimension finie. Caractérisation séquentielle.

Équivalence entre l'existence d'une limite et celle des limites des coordonnées de la fonction dans une base de l'espace d'arrivée.

Opérations algébriques sur les limites.

Limite d'une composée.

Continuité en un point. Caractérisation séquentielle de la continuité en un point.

Applications continues. Opérations algébriques sur les applications continues. Composition de deux applications continues.

Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue.

Applications lipschitziennes ; continuité des applications lipschitziennes.

Toute application linéaire sur un espace de dimension finie est lipschitzienne.

Continuité des applications multilinéaires et polynomiales sur $\mathbb{K}^n$.

Toute fonction continue sur une partie fermée et bornée, à valeurs dans $\mathbb{R}$, est bornée et atteint ses bornes (existence d'extrémums).

Extensions de la notion de limite : limite de $f(x)$ lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$; limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, lorsque A est une partie de $\mathbb{R}$; limite infinie en a adhérent à A pour une application à valeurs réelles.

Les élèves doivent savoir que la continuité en un point d'une fonction à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.

Les élèves doivent savoir que deux applications continues qui coïncident sur une partie dense sont égales.

Si f est une application continue de E dans $\mathbb{R}$ alors l'ensemble défini par $f(x) > 0$ (ou $f(x) < 0$) est un ouvert et les ensembles définis par $f(x) = 0$ ou $f(x) \geq 0$ ou $f(x) \leq 0$ sont des fermés.

Exemple : l'application $x \mapsto d(x, B)$ où B est une partie d'un espace vectoriel normé.

Existence d'un réel $C > 0$ tel que, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| \leq C\|x\|$.

La notion de norme subordonnée est hors programme.

Exemples d'étude de la continuité de fonctions réelles définies sur une partie de $\mathbb{K}^d$.

E et F des espaces de dimension finie. Si f est continue sur une partie fermée et bornée K de E , à valeurs dans $(F, \|\cdot\|)$, alors f est bornée et l'application $x \mapsto \|f(x)\|$, définie sur K , atteint ses bornes.

2.4 Intégration des fonctions continues par morceaux sur un intervalle

L'objectif de ce chapitre est de décrire, dans le cadre restreint des fonctions continues par morceaux, la notion d'intégrabilité sur un intervalle quelconque. On soulignera l'importance du principe de comparaison pour ramener l'étude de l'intégrabilité d'une fonction à l'estimation de son comportement aux bornes de l'intervalle d'intégration.

Il est attendu qu'à l'issue de ce chapitre, les élèves

– sachent établir la convergence ou la divergence d'une intégrale dans des cas standard et en particulier

- soient capables de comparer une fonction positive aux fonctions de référence ;
- aient mis en œuvre les techniques d'intégration usuelles pour étudier ou calculer l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle quelconque.

Les fonctions considérées sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles ou complexes.

Fonctions continues par morceaux sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Opérations sur les fonctions continues par morceaux.

Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux.

Primitives d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle quelconque.

Définition d'une intégrale généralisée (« impropre ») convergente.

Cas des fonctions positives.

Principe de comparaison pour les fonctions positives.

Étude de l'intégrabilité sur $]0, 1]$ ou sur $[1, +\infty[$ des fonctions de référence usuelles : $x \mapsto e^{\lambda x}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), $x \mapsto x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), $x \mapsto |\ln x|$.

Comparaison de l'intégrale $\int_0^\infty f(t) dt$ et de la série $\sum_{n \geq 0} f(n)$ pour une fonction $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ positive, continue par morceaux et décroissante.

f est continue par morceaux sur I si et seulement sa restriction sur tout segment de I est continue par morceaux.

Brève extension des propriétés étudiées en première année PCSI.

Deux primitives d'une fonction continue par morceaux sur l'intervalle I diffèrent d'une constante.

Soit I un intervalle dont les extrémités inférieure et supérieure (dans $\overline{\mathbb{R}}$) sont notées a et b respectivement, $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) une fonction continue par morceaux et F une primitive de f sur I ; on dit que f admet une intégrale convergente sur I si F admet des limites dans $\mathbb{K}$ en a et en b , auquel cas on pose $\int_a^b f = \lim_b F - \lim_a F$.

Si par exemple $I = [a, b[$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in [a, +\infty]$, f admet une intégrale convergente si et seulement si la limite $\lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} \int_a^x f$ existe dans

$\mathbb{K}$; dans ce cas cette limite est la valeur de l'intégrale $\int_a^b f$.

Notations $\int_I f$, $\int_a^b f(t) dt$

Si la fonction f est à valeurs réelles positives, elle admet une intégrale convergente sur I si, et seulement si, la fonction F est majorée sur I , ce qui revient à dire que l'ensemble des intégrales de f sur un segment contenu dans I est majoré ; dans ce cas la borne supérieure de cet ensemble est égale à l'intégrale $\int_a^b f$.

Dans le cas où f est à valeurs réelles positives et n'admet pas d'intégrale convergente sur I , il est pratique d'écrire $\int_a^b f = +\infty$.

Encadrement, domination, négligeabilité et équivalence.

Pour $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, étude de l'intégrabilité de $x \mapsto \frac{1}{(x-a)^\alpha}$ sur $]a, b]$, de l'intégrabilité de $x \mapsto \frac{1}{(b-x)^\alpha}$ sur $[a, b[$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Linéarité de l'application $f \mapsto \int_I f$, définie sur l'espace des fonctions de I dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ dont l'intégrale converge. Positivité dans le cas réel.

Relation de CHASLES.

f est intégrable sur I si et seulement si, pour tout $c \in I$, f est intégrable sur $I \cap [c, +\infty[$ et sur $I \cap]-\infty, c]$ et dans ce cas

$$\int_I f = \int_{I \cap]-\infty, c]} f + \int_{I \cap [c, +\infty[} f$$

Intégrale absolument convergente. Si une intégrale est absolument convergente, elle est convergente.

Fonction intégrable sur un intervalle.

La fonction f possède une intégrale absolument convergente sur I si $\int_I |f|$ converge.

La fonction f est intégrable sur I si elle possède une intégrale absolument convergente sur I , c'est à dire si $\int_I |f|$ converge.

$$|\int_I f| \leq \int_I |f|.$$

Espace vectoriel des fonctions continues par morceaux et intégrables de I dans $\mathbb{K}$. Inégalité triangulaire.

Pour des fonctions f et g continues par morceaux sur $[a, +\infty[$:

– si $|f| \leq |g|$ ou si $f = O_{+\infty}(g)$, alors l'intégrabilité de g implique celle de f sur $[a, +\infty[$.

– si $|f| \underset{+\infty}{\sim} |g|$, alors l'intégrabilité de f est équivalente à celle de g sur $[a, +\infty[$.

Si f est à valeurs réelles, continue et intégrable sur I , et si $\int_I |f(t)| dt = 0$, alors f est identiquement nulle sur I .

Espace vectoriel des fonctions continues par morceaux de carré intégrable. Le produit de deux fonctions de carré intégrable est intégrable ; inégalité de CAUCHY-SCHWARZ.

Intégration par parties sur un intervalle quelconque.

Adaptation au cas d'un intervalle quelconque.

Structure préhilbertienne de l'espace des fonctions continues de carré intégrable sur I et à valeurs réelles.

L'existence de deux des trois termes apparaissant dans la formule justifie le calcul. Notation $[F]_a^b$.

On considère sur quelques exemples l'utilisation de la formule d'intégration par parties pour ramener l'étude de la convergence d'une l'intégrale à celle d'une intégrale absolument convergente.

Les élèves peuvent appliquer ce résultat sans justification dans des cas de changement de variable simples (fonctions afne, puissance, exponentielle, logarithme).

Formule de changement de variable dans une intégrale sur un intervalle quelconque : étant données une fonction f continue sur un intervalle I et une fonction φ bijective et de classe $\mathcal{C}^1$ d'un intervalle I' sur l'intervalle I , les intégrales $\int_I f$ et $\int_{I'} (f \circ \varphi) |\varphi'|$ sont de même nature et sont égales en cas de convergence.

Intégration des relations de comparaison : domination, négligeabilité, équivalence.

La fonction de référence est positive.

2.5 Compléments sur les séries numériques - Suites et séries de fonctions

Ce chapitre vise trois objectifs :

- consolider et élargir les acquis de première année PCSI sur les séries numériques, notamment la comparaison d'une série à une intégrale et la notion de produit de Cauchy de deux séries ;
- définir les modes usuels de convergence des suites et séries de fonctions (convergence simple, convergence uniforme, convergence normale d'une série de fonctions) ;
- exploiter ces types de convergence pour étudier la stabilité des propriétés des fonctions par passage à la limite (interversion des limites, continuité, dérivation, intégration).

Il est attendu qu'à l'issue de ce chapitre, les élèves

- soient en mesure de comparer les normes de la convergence uniforme, de la convergence en moyenne et de la convergence en moyenne quadratique, définies sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$, et soient capables d'utiliser des suites de fonctions pour établir que ces normes ne sont pas équivalentes ;
- soient capables de mener l'étude de la convergence d'une suite ou d'une série de fonctions et en maîtrisent les techniques ;
- soient en mesure de mettre en œuvre ces techniques et les exploiter pour l'étude des propriétés de la limite d'une suite (ou de la somme d'une série) de fonctions (régularité, étude asymptotique, comparaison série-intégrale).

La semi-convergence des séries numériques n'est pas un objectif du programme.

2.5.1 Compléments sur les séries numériques

Rappels de cours de PCSI et exercices de révisions sur les séries numériques.

Sommation des relations de comparaison : domination, négligeabilité, équivalence.

Comparaison de l'intégrale $\int_0^\infty f(t) dt$ et de la série $\sum_{n \geq 0} f(n)$ pour une fonction $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ positive, continue par morceaux et décroissante.

Formule de Stirling : équivalent de $n!$.

Définition du produit de Cauchy de deux séries numériques.

Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes : si les séries $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n$ sont absolument convergentes, alors la série $\sum_{n \geq 0} c_n$ l'est

aussi et on a
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right).$$

La fonction de référence est positive.

la série $\sum_{n \geq 0} f(n)$ converge si, et seulement si, f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Démonstration non exigible.

La série $\sum_{n \geq 0} c_n$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$, est appelée la série produit de Cauchy des séries $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n$.

Démonstration non exigible.

2.5.2 Modes de convergence d'une suites ou d'une séries de fonctions

Convergence simple d'une suite ou d'une série d'applications d'un ensemble X dans un espace vectoriel normé de dimension finie F .

Convergence uniforme d'une suite ou d'une série d'applications de X dans F .

La convergence uniforme implique la convergence simple.

Une série de fonctions converge uniformément si, et seulement si, elle converge simplement et la suite de ses restes converge uniformément vers 0.

Si X est un ensemble, norme de la convergence uniforme sur l'espace $\mathcal{B}(X; F)$ des applications bornées de X dans F ; cette norme est dite norme infinie ou norme uniforme.

Normes de la convergence en moyenne et de la convergence en moyenne quadratique sur l'espace des fonctions continues sur un segment à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Convergence normale d'une série d'applications de X dans F . La convergence normale implique la convergence uniforme et la convergence absolue en tout point.

Les notions de convergence simple et uniforme d'une série de fonctions sont définies via la suite de ses sommes partielles.

Dans l'espace $\mathcal{B}(X; F)$, muni de la norme de la convergence uniforme, interprétation de la convergence uniforme d'une suite de fonctions en terme de norme.

Les élèves doivent savoir utiliser des suites de fonctions pour établir que les normes de la convergence uniforme, de la convergence en moyenne et de la convergence en moyenne quadratique, définies sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$, ne sont pas équivalentes.

Pour établir la convergence normale d'une série de fonctions $\sum_n f_n$, les élèves doivent savoir utiliser une série numérique convergente $\sum_n \alpha_n$ qui soit majorante, c'est-à-dire telle que pour tout n , $\|f_n\|_\infty \leq \alpha_n$.

2.5.3 Stabilité des propriétés des fonctions par passage à la limite

X désigne ici une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie E .

Théorème d'interversion des limites (double limite) : soient $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions de X dans F convergeant uniformément vers f sur X , a un point de E adhérent à X ; si, pour tout $n \geq 0$, la fonction f_n admet une limite $\ell_n \in F$ en a , alors la suite $(\ell_n)_{n \geq 0}$ admet une limite $\ell \in F$ et on a $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$; autrement dit

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right).$$

Théorème de continuité :

Continuité en $x_0 \in X$ de la limite d'une suite (ou de la somme d'une série) d'applications de X dans F , continues en x_0 , convergeant uniformément.

Démonstration non exigible.

Adaptation, si X est un intervalle non majoré (resp. non minoré) de $\mathbb{R}$, au cas où $a = +\infty$ (resp. $a = -\infty$).

Extension du théorème et de son adaptation au cas des séries de fonctions : interversion d'une limite et d'une somme.

Continuité de la limite d'une suite (ou de la somme d'une série) uniformément convergente d'applications continues de X dans F .

Adaptation au cas où X est un intervalle de $\mathbb{R}$ et la convergence est uniforme sur tout segment de X .

Intégration d'une limite uniforme sur un segment :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, x_0 un point de I et $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$. On suppose que la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur tout segment contenu dans I vers une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{K}$. Pour n dans $\mathbb{N}$ et x dans I , on pose : $g_n(x) = \int_{x_0}^x f_n$ et $g(x) = \int_{x_0}^x f$. Alors la suite de fonctions $(g_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers g sur tout segment contenu dans I .

Théorème d'intégration terme à terme d'une séries de fonctions continues convergeant uniformément.

En particulier, si la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers f sur le segment J , alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_J f_n = \int_J f.$$

Comparaison entre la convergence uniforme et la convergence en moyenne sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$.

Adaptation du théorème précédent au cas des séries de fonctions.

Dérivation de la limite d'une suite de fonctions :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbb{K}$. On suppose que la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement sur I vers une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ et que la suite $(f'_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur tout segment contenu dans I vers une fonction $h : I \rightarrow \mathbb{K}$. Alors la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers f sur tout segment contenu dans I , f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = h$.

Extension aux suites de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, sous l'hypothèse de convergence simple de la suite $(f_n^{(p)})_{n \geq 0}$ pour tout $p \in \{0, \dots, k-1\}$ et de convergence uniforme de la suite $(f_n^{(k)})_{n \geq 0}$ sur tout segment contenu dans I .

Adaptation au cas des séries de fonctions : théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$; extension aux séries de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

Les élèves peuvent appliquer directement un théorème concluant au caractère $\mathcal{C}^k$ de la limite ou de la somme.

2.6 Séries entières

Ce chapitre a trois objectifs :

- étudier la convergence d'une série entière et les propriétés de sa somme, grâce au concept fondamental de rayon de convergence ;
- introduire la notion de développement d'une fonction en série entière (série de Taylor) ;
- établir les développements en série entière des fonctions usuelles.

Il est attendu qu'à l'issue de ce chapitre, les élèves

- puissent déterminer le rayon de convergence d'une série entière dans des cas standard ;
- connaissent les propriétés d'une telle série et celles de sa somme (domaines de convergence simple, uniforme et normale ; continuité de la somme ; dérivation et intégration terme à terme) ;
- connaissent les développements en série entière usuels et sachent les exploiter pour exprimer la somme d'une série de fonctions ou les solutions d'une équation à l'aide des fonctions élémentaires.

Pour tout $r \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, on pose $D(0, r) := \{z \in \mathbb{C}, |z| < r\}$; si $0 < r < +\infty$, $D(0, r)$ est le disque ouvert de centre 0 et de rayon r ; par abus de langage, on dira que $\mathbb{C}$ est le disque ouvert de rayon $+\infty$.

2.6.1 Rayon de convergence d'une série entière

Notion de série entière associée à une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ de nombres complexes.

Lemme d'Abel : si la suite $(a_n z_0^n)_{n \geq 0}$ est bornée alors, pour tout nombre complexe $z \in D(0, |z_0|)$, la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est absolument convergente.

Rayon de convergence R d'une série entière. Disque ouvert $D(0, R)$ de convergence ; intervalle ouvert de convergence $] - R, R[$.

La série numérique $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est absolument convergente pour tout $z \in D(0, R)$; elle est grossièrement divergente pour tout z tel que $|z| > R$.

Soient $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ des séries entières de rayons de convergence R_a et R_b respectivement. Si $|a_n| \leq |b_n|$ alors $R_a \geq R_b$.

Une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et sa série entière dérivée $\sum_{n \geq 0} n a_n z^{n-1}$ ont même rayon de convergence.

Règle de d'Alembert : rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ si la suite $\left(\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right)_{n \geq 0}$ est définie et admet une limite dans $[0, +\infty[$.

Somme et produit de Cauchy de deux séries entières.

Notation $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$.

Le rayon de convergence R est défini comme la borne supérieure dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ de l'ensemble $\{\rho \geq 0 ; (a_n \rho^n)_n \text{ bornée}\}$.

En particulier, si $a_n = O(b_n)$ alors $R_a \geq R_b$ et si $|a_n| \sim |b_n|$ alors $R_a = R_b$.

Plus généralement, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, les séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 1} n^\alpha a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Minoration des rayons de convergences ; linéarité de la somme, somme du produit de Cauchy.

2.6.2 Propriétés de la somme

La convergence d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$ est normale sur tout disque fermé de centre 0 et de rayon strictement inférieur à R .

Continuité de la somme d'une telle série sur son disque ouvert de convergence.

Primitivation d'une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence.

En particulier, la convergence d'une telle série est normale sur toute partie fermée et bornée contenue dans $D(0, R)$.

L'étude des propriétés de la somme au bord du disque ouvert de convergence n'est pas un objectif du programme.

Si $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$, une primitive sur l'intervalle $] - R, R[$ de la fonction $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ s'obtient en intégrant terme à terme la série définissant f .

La somme d'une série entière est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son intervalle ouvert de convergence et ses dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme.

La fonction $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -R, R[$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{f^{(k)}(t)}{k!} = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} a_n t^{n-k}, \quad t \in] -R, R[.$$

Expression des coefficients d'une série entière de rayon de convergence strictement positif à l'aide des dérivées successives en 0 de sa somme : avec les notations précédentes, $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

Si les fonctions $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ coïncident sur un voisinage de 0, alors $a_n = b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.6.3 Développement en série entière au voisinage de 0 d'une fonction

Développement de $z \mapsto e^z$ sur $\mathbb{C}$; développement de $z \mapsto \frac{1}{1-z}$ sur $D(0, 1)$.

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}; \quad \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n, \quad |z| < 1.$$

Fonction développable en série entière sur un intervalle $] -r, r[$, $r > 0$.

Une telle fonction est en particulier de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $] -r, r[$.

Série de Taylor d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle $] -r, r[$, $r > 0$.

Unicité du développements en série entière.

Développements en série entière en 0 des fonctions : $t \mapsto e^{ta}$ ($a \in \mathbb{C}$), $t \mapsto \sinh t$, $t \mapsto \cosh t$, $t \mapsto \sin t$, $t \mapsto \cos t$, $t \mapsto \arctan t$, $t \mapsto \ln(1+t)$, $t \mapsto (1+t)^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).

Les élèves doivent être capables de déterminer un développement en série entière à l'aide d'une équation différentielle.

2.7 Fonctions vectorielles d'une variable réelle, arcs paramétrés

Ce chapitre poursuit trois objectifs :

- consolider les acquis de première année PCSI concernant la dérivation des fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes et étendre ces résultats au cas des fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ avec $n \geq 1$;
- formaliser des notions géométriques (arc paramétré, tangente) et cinématiques (vitesse, accélération) rencontrées dans d'autres disciplines scientifiques;
- fournir des outils pour l'étude des équations différentielles linéaires et le calcul différentiel.

Il est attendu qu'à l'issue de ce chapitre, les élèves

- connaissent et sachent exploiter l'interprétation cinématique et graphique de la notion de dérivée en un point;
- soient capables de mener l'étude de fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et en particulier d'en établir les propriétés liées à la continuité, à la dérivabilité et à la classe $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N}^*$;

- sachent déterminer la tangente et la normale à un arc paramétré plan en un point associé à un paramètre régulier.

Les fonctions étudiées ici sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ avec $n \geq 1$.

2.7.1 Dérivation

Dérivabilité d'une fonction en un point. Expression des composantes de la dérivée en un point. Dérivabilité à droite et à gauche.

Dérivabilité sur un intervalle, application dérivée. Combinaison linéaire de fonctions dérivables, linéarité de la dérivation.

Dérivabilité et dérivée d'une application de la forme $L \circ f$ où L est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

Dérivabilité et dérivée d'une application de la forme $B(f, g) : t \mapsto B(f(t), g(t))$ où B est une application bilinéaire; cas du produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, du produit mixte et du carré de la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$.

Dérivabilité et dérivée de $f \circ \varphi$ où φ est une fonction réelle de variable réelle et f une fonction vectorielle.

Applications k fois dérivables, de classe $\mathcal{C}^k$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ ($k \in \mathbb{N}^*$).

Opérations algébriques sur les applications de classe $\mathcal{C}^k$.

Dérivée k -ième d'une application de la forme $B(f, g) : t \mapsto B(f(t), g(t))$, B étant une application bilinéaire : si f et g sont k fois dérivables (resp. de classe $\mathcal{C}^k$) alors $B(f, g)$ l'est aussi. Expression de la dérivée k -ième de $B(f, g)$: formule de Leibniz.

La composée $f \circ \varphi$ d'une application $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et d'une application φ de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle J de $\mathbb{R}$ à valeurs dans I est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J .

Formes équivalentes : taux d'accroissement, développement limité à l'ordre 1.

Interprétation géométrique.

Interprétation cinématique, vitesse instantanée.

$$(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'.$$

$$(L \circ f)' = L \circ f'.$$

La dérivée de $t \mapsto (f(t)|g(t))$ est l'application $t \mapsto (f'(t)|g(t)) + (f(t)|g'(t))$, celle de $t \mapsto \|f(t)\|^2$ est $t \mapsto 2(f'(t)|f(t))$.

$$(f \circ \varphi)' = \varphi' \cdot (f' \circ \varphi).$$

Interprétation cinématique de la dérivée seconde, accélération.

Espace vectoriel $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$ des applications de classe $\mathcal{C}^k$ sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, algèbre $\mathcal{C}^k(I)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I à valeurs réelles ou complexes, $0 \leq k \leq +\infty$.

$$(B(f, g))^{(k)}(t) = \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} B(f^{(p)}(t), g^{(k-p)}(t)), t \in I.$$

2.7.2 Arcs paramétrés

Arc paramétré de classe C^k , $k \in \mathbb{N}^*$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Support de l'arc (ou courbe associée). Multiplicité d'un point du support.

Paramètre régulier. Tangente en un point associé à un paramètre régulier ; normale à un arc paramétré plan en un point associé à un paramètre régulier.

Exemples simples d'arcs paramétrés plans
Construction d'arcs plans.

Longueur d'un arc paramétré de classe C^1 .

Interprétation cinématique des dérivées d'ordre 1 et 2.

Les élèves doivent savoir utiliser des développements limités pour déterminer l'allure de la courbe au voisinage d'un point ainsi que des développements asymptotiques pour étudier les branches infinies.

Les notions d'abscisse curviligne et de paramétrage admissible sont hors programme.

2.8 Calcul différentiel

L'objectif de ce chapitre est de présenter les premières notions de calcul différentiel pour des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$; ce qui permet d'étendre les notions de base du calcul différentiel d'une variable aux fonctions de plusieurs variables en vue de les appliquer à l'analyse et la géométrie : problèmes d'extremums, résolution d'équations aux dérivées partielles, étude locale des courbes et des surfaces.

Il est attendu qu'à l'issue de ce chapitre, les élèves

- sachent vérifier si une fonction est de classe C^k , ($k \in \mathbb{N}^*$) et en calculer les dérivées partielles ;
- soient en mesure de déterminer les points critiques d'une fonction, si elle en admet, et en rechercher les extremums locaux ou globaux ;
- soient capables d'appliquer les résultats du calcul différentiel notamment pour déterminer les vecteurs tangents au graphe d'une fonction de deux variables ou à une surface d'équation $f(x, y, z) = 0$, et préciser le plan tangent à une surface définie par une équation cartésienne $z = \varphi(x, y)$;
- soient initiés à la résolution d'équations aux dérivées partielles à travers l'étude d'exemples simples ;
- soient capables d'exploiter les résultats de la théorie des fonctions pour l'étude de problèmes numériques (majorations d'expressions, problèmes d'optimisation, solutions d'équations, ...).

Les applications f considérées dans ce chapitre sont définies sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ à valeurs réelles. On se limite en pratique au cas $n \leq 3$.

2.8.1 Fonctions de classe C^1

Dérivées partielles d'ordre 1 en un point d'une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ à valeurs réelles.
Fonction de classe C^1 sur U .

Notations $\partial_j f(a)$ et $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$.

Une fonction est dite de classe C^1 sur U si ses dérivées partielles d'ordre 1 existent et sont continues sur U .

Opérations sur les fonctions de classe C^1 .

Une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U admet en tout point a de U un développement limité d'ordre 1.
 Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U est continue sur U .
 Différentielle de f en a .

Différentielle d'une combinaison linéaire d'applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur U .

Différentielle de l'application $F : (x, y) \mapsto f(x)g(y)$ où f et g sont deux applications de classe $\mathcal{C}^1$.

Cas particuliers : différentielle de la restriction à un ouvert d'une application constante, d'une application linéaire.

Démonstration non exigible.

Elle est définie comme l'application linéaire $df(a)$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R} : (h_1, \dots, h_n) \mapsto \sum_{i=1}^n h_i \partial_i f(a)$. Notation $df(a).h$.
 $d(\lambda.f + g)(a) = \lambda.df(a) + dg(a)$.

$dF(a, b).(h, k) = g(b)df(a).h + f(a)dg(b).k$.

2.8.2 Composition d'applications de classe $\mathcal{C}^1$

Dérivée de $t \mapsto f(x_1(t), \dots, x_n(t))$, dérivée le long d'un arc γ .

Application au calcul des dérivées partielles d'une composée de la forme

$$F : (u, v) \mapsto f(x(u, v), y(u, v)).$$

Si $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dérivable en t , $\gamma(I) \subset U$ et f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U , alors l'application $f \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en t et $(f \circ \gamma)'(t) = df(\gamma(t)).\gamma'(t)$.
 Interprétation géométrique en termes de tangentes.

Règle de la chaîne (chain rule) :

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \frac{\partial y}{\partial u}(u, v);$$

$$\frac{\partial F}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \frac{\partial y}{\partial v}(u, v).$$

Les élèves doivent connaître le cas particulier des coordonnées polaires.

2.8.3 Vecteur gradient

Dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique $(\cdot, \cdot)$, gradient en $a \in U$ d'une application numérique f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U .

Égalité : $df(a).h = (\nabla f(a)|h)$.

Le gradient est défini par ses coordonnées.

Notation $\nabla f(a)$.

2.8.4 Applications géométriques des notion sprécédentes

Courbe du plan définie par une équation $f(x, y) = 0$ avec f de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Point régulier.

Équation de la tangente en un point régulier.

En un point où il est non nul, le gradient de f est orthogonal aux lignes de niveau $f(x, y) = \lambda$ et orienté dans le sens des valeurs croissantes de f .

On admet l'existence d'un paramétrage local de classe $\mathcal{C}^1$.

Surface définie par une équation $f(x, y, z) = 0$ avec f de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

Point régulier.

Courbes tracées sur une surface.

Plan tangent à une surface en un point régulier défini comme le plan orthogonal au gradient et passant par le point.

Cas particulier des courbes coordonnées d'une surface d'équation $z = g(x, y)$.

Équation cartésienne.

Tangentes aux courbes régulières de classe $\mathcal{C}^1$ tracées sur la surface.

2.8.5 Applications de classe $\mathcal{C}^2$

Dérivées partielles d'ordre 2 d'une fonction de deux ou trois variables à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

Théorème de Schwarz.

Opérations algébriques sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.

Exemples d'équations aux dérivées partielles du premier et du second ordre : équation du transport, équation de la diffusion thermique, équation de propagation.

Une fonction est dite de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U si ses dérivées partielles d'ordre 2 existent et sont continues sur U .

Démonstration hors programme.

Pour l'étude d'équations aux dérivées partielles, les élèves doivent savoir exploiter les techniques de changements de variables : transformations affines, passage en coordonnées polaires.

La notion de difféomorphisme étant hors programme, l'expression des solutions en fonction des variables initiales n'est pas exigée.

2.8.6 Extremums d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

Point critique d'une application.

Extremum local, global.

Condition nécessaire d'existence d'un extremum local.

Développement limité à l'ordre deux, au voisinage d'un point, pour une application de classe $\mathcal{C}^2$.

Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour une application de classe $\mathcal{C}^2$.

Matrice hessienne.

Utilisation de la matrice hessienne lorsqu'elle est inversible pour déterminer la nature d'un point critique.

Recherche des extremums globaux sur une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^n$.

Si une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ admet un extremum local en un point, alors celui-ci est un point critique de f .

Démonstration hors programme.

Exemples de recherche d'extremums locaux.

3 Seconde période

3.1 Espaces préhilbertiens réels. Endomorphismes des espaces euclidiens

L'objectif de ce chapitre est triple :

- *consolider les acquis de première année PCSI concernant les espaces préhilbertiens réels et les espaces euclidiens, en généralisant les outils de géométrie vectorielle euclidienne du plan et de l'espace à des dimensions quelconques ;*
- *étudier les isométries vectorielles et les matrices orthogonales, notamment dans le cas des dimensions 2 et 3 en insistant sur les représentations géométriques ;*
- *aborder la réduction des endomorphismes symétriques et des matrices symétriques réelles, ce qui permet d'approfondir la réduction des endomorphismes et des matrices.*

Il est attendu qu'à l'issue de ce chapitre, les élèves

- *maîtrisent les notions de bases sur le produit scalaire, sachent orthogonaliser une famille libre (indexée par une partie de $\mathbb{N}$) d'un espace préhilbertien au moyen de l'algorithme de Gram-Schmidt, et soient capables d'exprimer la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie (théorème de la projection orthogonale, existence de la meilleure approximation quadratique) ;*
- *maîtrisent, dans le cas euclidien, les relations entre le point de vue géométrique (vecteurs, endomorphismes symétriques, automorphismes orthogonaux) et le point de vue matriciel ;*

Hormis la définition et quelques exemples simples, l'étude de la notion de l'adjoint d'un endomorphisme est hors programme. Cette notion est introduite à titre d'information pour préparer les élèves aux cursus post classes préparatoires. Les résultats importants dans ce domaine seront traités dans ces cursus.

Les espaces préhilbertiens considérés dans ce chapitre sont réels. Toute notion sur les espaces préhilbertiens complexes est hors programme.

Les notions de forme quadratique et d'endomorphisme symétrique positif sont hors programme.

3.1.1 Rappels sur les produits scalaires

Espaces préhilbertiens réels, espaces euclidiens.

Exemples de référence : produit scalaire euclidien canonique sur $\mathbb{R}^n$, produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, produits scalaires définis par une intégrale sur les espaces de fonctions continues.

Inégalité de Cauchy-Schwarz. Cas d'égalité.

Norme associée à un produit scalaire. Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire.

Notations $\langle x, y \rangle$, $(x|y)$, $x.y$.

Application géométrique dans le cas du produit scalaire usuel du plan ou de l'espace, équations de plans et de droites.

Les élèves doivent savoir manipuler les identités remarquables sur les normes (développement de $\|u \pm v\|^2$, identité de polarisation, ...).

3.1.2 Orthogonalité

Vecteurs orthogonaux, sous-espaces orthogonaux, orthogonal d'un sous-espace vectoriel. Familles orthogonales, orthonormales (ou orthonormées).

Suites orthonormales $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Théorème de Pythagore.

Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Existence de bases orthonormales dans le cas euclidien. Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormale. Expressions du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormale.

Rappels de première année PCSI.

Exemples de suites orthonormales dans l'espace des polynômes, dans l'espace des fonctions continues T -périodiques, etc.

Application au calcul d'une base orthonormée de polynômes pour différents produits scalaires. Décomposition QR d'une matrice inversible.

Expression tXY du produit scalaire de deux vecteurs x et y de coordonnées X et Y dans une base orthonormale.

Les élèves doivent savoir calculer, à l'aide du produit scalaire, les coefficients de la matrice d'un endomorphisme dans une base orthonormale.

3.1.3 Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

Projection orthogonale sur un sous-espace V de dimension finie.

Caractérisation métrique du projeté orthogonal : Le projeté orthogonal de x sur V , noté $P_V(x)$, est l'unique élément de V qui minimise la distance de x à V , $\|x - P_V(x)\| = \min_{y \in V} \|x - y\|$.

Distance d'un vecteur x à un sous-espace vectoriel V de dimension finie.

Inégalité de BESSEL : pour tout $x \in E$,

$$\|P_V(x)\| \leq \|x\|.$$

Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace V de dimension finie. En dimension finie, dimension de $V^\perp$.

Rappels de première année PCSI.

Notation $d(x, V)$.

Les élèves doivent savoir déterminer $P_V(x)$ en calculant son expression dans une base orthonormale de V ou en résolvant un système linéaire traduisant l'orthogonalité du vecteur $x - P_V(x)$ aux vecteurs d'une base (ou à défaut d'une famille génératrice) de V .

Application à l'approximation d'une fonction par des polynômes au sens de la norme en moyenne quadratique.

Si $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthonormale, alors, pour tout $x \in E$, la suite $(\langle x, e_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ est de carré sommable et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle^2 \leq \|x\|^2.$$

En dimension finie, $V^{\perp\perp} = V$.

3.1.4 Endomorphismes symétriques d'un espace préhilbertien. Cas euclidien.

L'endomorphisme u est dit symétrique si, pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$.

Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable par un endomorphisme symétrique.

Dans le cas euclidien, caractérisation de la symétrie d'un endomorphisme u par la matrice représentant u dans une base orthonormale.

Dans le cas euclidien, caractérisation des endomorphismes symétriques idempotents, involutifs.

Théorème spectral : tout endomorphisme symétrique u d'un espace euclidien E est diagonalisable dans une base orthonormale.

Traduction matricielle du théorème spectral.

Si u est un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E , expression des extremums de la fonction $x \mapsto \langle u(x), x \rangle$ sur la sphère unité de E à l'aide des valeurs propres de u .

Application à la géométrie : réduction, sur des exemples, des équations du second degré

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Pas d'étude systématique de cette notion en dimension infinie. Des exemples peuvent être proposés en liaison avec les équations différentielles.

Si u est un endomorphisme symétrique, l'orthogonal d'un sous-espace stable par u est aussi stable par u .

Son polynôme caractéristique χ_u est scindé sur $\mathbb{R}$ et E est somme directe orthogonale des sous-espaces propres de u .

Toute matrice carrée symétrique réelle est orthogonalement diagonalisable.

Interprétation dans le registre matriciel : si A est une matrice carrée symétrique réelle, extremums de la fonction $X \mapsto {}^tXAX$ sur la sphère unité.

Les étudiants doivent savoir reconnaître une ellipse, une parabole, une hyperbole et donner leur représentation graphique à partir de l'équation réduite.

3.1.5 Endomorphismes orthogonaux d'un espace euclidien.

Isométries vectorielles d'un espace euclidien.

Définition par la linéarité et la conservation des normes, caractérisation par la conservation du produit scalaire, caractérisation par l'image d'une (de toute) base orthonormale.

Autre dénomination : automorphisme orthogonal.

Symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace ; réflexion.

Groupe orthogonal.

Notation $O(E)$.

Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.

Si u est un endomorphisme orthogonal de E , l'orthogonal d'un sous-espace stable par u est aussi stable par u .

Matrice orthogonale.

Caractérisation par le caractère orthonormal de la famille des colonnes, des lignes.

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si ${}^tAA = I_n$, c'est équivalent à $A{}^tA = I_n$.

Groupe orthogonal d'ordre n .

Lien entre les notions de base orthonormale, isométrie et matrice orthogonale.

Déterminant d'une matrice orthogonale, d'une isométrie ; déterminant d'une réflexion. Matrice orthogonale positive, négative ; isométrie positive (rotation), négative.

Groupe spécial orthogonal.

Cas de l'espace euclidien de dimension 2 ou 3 :

Orientation, bases orthonormales directes.

Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base orthonormale directe : produit mixte.

Produit vectoriel. Calcul dans une base orthonormale directe.

Orientation d'un plan ou d'une droite dans un espace euclidien de dimension trois orienté.

Isométries vectorielles en dimension 2 :

Classification des isométries vectorielles d'un plan euclidien.

Le groupe $SO(E)$ est commutatif.

Description des matrices orthogonales et orthogonales positives de taille 2.

Le groupe $SO_2(\mathbb{R})$ est commutatif.

Dans un plan euclidien orienté, mesure θ (définie modulo 2π) de l'angle orienté de deux vecteurs a et b non nuls ; relations $\langle a, b \rangle = \|a\| \|b\| \cos \theta$ et $\text{Det}(a, b) = \|a\| \|b\| \sin \theta$.

Matrice dans une base orthonormale directe d'une rotation, mesure de l'angle d'une rotation ; matrice de rotation $R(\theta)$ associée à un nombre réel θ .

Produit de deux matrices de rotation. Composée de deux rotations d'un plan euclidien.

Isométries vectorielles en dimension 3 :

Axe et mesure de l'angle d'une rotation d'un espace euclidien orienté de dimension 3.

Notations $O_n(\mathbb{R})$, $O(n)$.

Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si, et seulement si, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui lui est canoniquement associé est une isométrie vectorielle.

Caractérisation d'un automorphisme orthogonal à l'aide de la matrice associée dans une (toute) base orthonormale ; changement de base orthonormale.

Notations $SO(E)$, $SO_n(\mathbb{R})$, $SO(n)$.

Notations $[u, v]$, $[u, v, w]$.

Interprétation géométrique comme aire ou volume.

Dans un plan euclidien E , tout automorphisme orthogonal est soit une réflexion, soit le produit de deux réflexions ; décomposition d'une rotation en produit de deux réflexions.

Lien entre les éléments de $SO_2(\mathbb{R})$ et les nombres complexes de module 1.

On introduira à cette occasion, sans soulever de difficulté sur la notion d'angle, la notion de mesure d'un angle orienté de vecteurs.

Application canonique $\theta \mapsto R(\theta)$ de $\mathbb{R}$ sur $SO(2)$.

Écriture complexe d'une rotation.

Matrice dans une base adaptée.

Classification des isométries vectorielles d'un espace euclidien de dimension trois.

3.1.6 Formes linéaires d'un espace euclidien, adjoint d'un endomorphisme

Théorème de représentation : pour toute forme linéaire φ sur E , il existe un et un seul vecteur x tel que

$$\forall y \in E, \quad \varphi(y) = \langle x, y \rangle .$$

Vecteur normal à un hyperplan.

Équations d'un hyperplan dans une base orthonormale.

Si u est un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien E , il existe un unique endomorphisme v de E tel que,

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, v(y) \rangle$$

Adjoint d'un endomorphisme symétrique ou orthogonal.

Isomorphisme canonique entre E et l'espace vectoriel des formes linéaires sur E .

Les élèves doivent savoir calculer la distance d'un vecteur à un hyperplan, la distance d'un vecteur à une droite.

Traduction matricielle dans une base orthonormale.

Il s'agit d'une présentation minimale de la notion d'adjoint. Les résultats importants dans ce domaine seront traités dans les cursus post classes préparatoires.

3.1.7 Application à l'étude des extrema d'une fonction de plusieurs variables réelles

Rappels sur le développement de Taylor à l'ordre 2, en un point critique a , pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert ; matrice hessienne $H_a(f)$ de f en a , elle est symétrique réelle.

Application du théorème spectral à la matrice $H_a(f)$, lorsqu'elle est inversible, pour obtenir une condition suffisante de maximum (minimum) local en un point critique.

En dimension 2, avec les notations de Monge, on obtient un extremum local si $rt - s^2 > 0$ et un point-col (ou point-selle) si $rt - s^2 < 0$.

3.2 Intégrales dépendant d'un paramètre

L'objectif de ce chapitre est double :

- étudier les suites et les séries de fonctions intégrables, grâce au théorème de convergence dominée et le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions ;
- appliquer les résultats obtenus à l'étude des fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre (théorèmes de continuité et de dérivation sous le signe $\int$).

Il est attendu qu'à l'issue de ce chapitre, les élèves connaissent ces théorèmes et soient en mesure de les exploiter notamment pour mener l'étude de fonctions définies par des intégrales dépendant d'un paramètre ; cette exploitation suppose en particulier la capacité à en vérifier les conditions d'application

en insistant d'abord sur les hypothèses importantes (hypothèse de domination, hypothèse de convergence, hypothèse d'intégrabilité, ...).

Il est recommandé de privilégier ici l'étude d'exemples significatifs (intégrales eulériennes, transformées de Fourier, transformées de Laplace, ...) en évitant les situations artificielles et les exercices de pure virtuosité technique.

3.2.1 Passage à la limite sous l'intégrale

Théorème de convergence dominé : Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur I et à valeurs complexes. Si $(f_n)_n$ converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I et s'il existe une fonction φ continue par morceaux, positive et intégrable sur I , telle que pour tout entier n , $|f_n| \leq \varphi$ (hypothèse de domination), alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et

$$\lim_n \int_I f_n = \int_I f.$$

Inégration terme à terme d'une série de fonctions : Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions complexes continues par morceaux et intégrables sur I telle que la série $\sum_n f_n$ converge simplement sur I vers une fonction f , continue par morceaux sur I , et que la série $\sum_n \left(\int_I |f_n| \right)$ soit convergente. Alors, f est intégrable sur I et

$$\int_I f = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n.$$

La démonstration de ce théorème est hors programme.

L'hypothèse de domination est plus importante que l'hypothèse de continuité par morceaux de f ; cette dernière étant imposée par les limitations du programme.

Extension au cas d'une famille $(f_\lambda)_{\lambda \in J}$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$.

La démonstration de ce théorème est hors programme.

L'hypothèse de convergence de la série $\sum_n \left(\int_I |f_n| \right)$ est plus importante que l'hypothèse de continuité par morceaux de f ; cette dernière étant imposée par les limitations du programme.

Dans la pratique, on commence par effectuer un calcul formel, où l'on permute les signes $\sum$ et $\int$, que l'on justifie ensuite.

3.2.2 Continuité et dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre

Théorème de continuité : Soient A une partie d'un espace vectoriel de dimension finie, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : (x, t) \mapsto f(x, t)$ une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur $A \times I$; on suppose que f est continue par rapport à x , continue par morceaux par rapport à t et telle que, pour tout élément x de A , la fonction $t \mapsto f(x, t)$ soit intégrable sur I . S'il existe une fonction positive φ , continue par morceaux et intégrable sur I , telle que, pour tout élément (x, t) de $A \times I$, $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$ (hypothèse de domination), alors la fonction g définie sur A par la relation $g(x) = \int_I f(x, t) dt$ est continue sur A .

L'hypothèse de domination est plus importante que l'hypothèse de continuité par morceaux; cette dernière étant imposée par les limitations du programme.

Extension au cas où l'hypothèse de domination est vérifiée au voisinage d'un point a de A .

Si A est un intervalle de $\mathbb{R}$, extension au cas où l'hypothèse de domination est vérifiée sur tout segment contenu dans A .

Théorème de dérivation : Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : (x, t) \mapsto f(x, t)$ une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur $J \times I$ et dérivable par rapport à x . On suppose que :

- pour tout $x \in J$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I ;
- pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue et, pour tout $x \in J$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur I ;
- il existe une fonction φ positive, continue par morceaux et intégrable sur I telle que, pour tout $(x, t) \in J \times I$, $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$ (hypothèse de domination).

Alors la fonction $g : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et on a la formule de Leibniz suivante :

$$g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt, \quad x \in J.$$

Extension au cas où l'hypothèse de domination est vérifiée sur tout segment contenu dans J .

Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$: classe $\mathcal{C}^k$ d'une intégrale dépendant d'un paramètre, sous l'hypothèse d'intégrabilité de $\frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x, \cdot)$, pour tout x de J si $0 \leq p \leq k - 1$, et domination sur tout segment contenu dans J de $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, \cdot)$.

3.2.3 Exemples d'applications

Exemples d'emploi du théorème de convergence dominé et du théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions intégrables.

Exemples significatifs d'étude de fonctions définies comme intégrales dépendant d'un paramètre : régularité, étude asymptotique.

Intégrales eulériennes, transformées intégrales (facteur échelle, retard, amortissement, valeur initiale ou finale, ...).

3.3 Probabilités

Ce chapitre complète l'étude des variables aléatoires discrètes déjà entamée en première année PCSI et aborde celle des variables aléatoires à densité; on y étudie aussi quelques résultats d'approximation.

Le chapitre est organisé autour des axes suivants :

- consolider les acquis de première année PCSI sur les variables aléatoires discrètes;
- introduire les notions de fonction de répartition, de moments et de fonction génératrice, et familiariser les élèves avec ces notions en mettant en œuvre les définitions et résultats du cours sur des exemples simples;
- étudier des exemples usuels de lois discrètes réelles (loi de Bernoulli, loi binomiale, loi géométrique, loi de Poisson, ...) et de lois à densité sur $\mathbb{R}$ (loi uniforme, loi exponentielle, loi gamma, loi gaussienne (ou normale), ...);
- étudier la notion de convergence et quelques théorèmes limites.

Il est attendu qu'à l'issue de ce chapitre, les élèves

- aient étudié des exemples usuels de lois discrètes réelles et de lois à densité;
- sachent reconnaître les situations classiques de modélisation par des lois discrètes ou continues usuelles;
- sachent utiliser les fonctions génératrices pour déterminer la loi ou calculer les moments d'une variable aléatoire entière dans des cas standard;
- soient capables de déterminer la densité d'une variable aléatoire à partir de sa fonction de répartition;
- apprennent à utiliser le produit de convolution pour déterminer la loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes, discrètes ou à densité;
- apprennent à approcher, sous certaines conditions, une loi binomiale par une loi de Poisson, et une loi hypergéométrique par une loi binomiale;
- sachent utiliser les théorèmes limites, dans des cas standard, pour donner des estimations à certains paramètres (espérance, variance, ...).

On admettra tout résultat utile sur les ensembles au plus dénombrable et la sommabilité d'une famille indexée sur $\mathbb{Z}$

3.3.1 Révisions du programme de première année PCSI sur les espaces probabilisés

Espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

On appelle événement toute partie de Ω qui est élément de la tribu $\mathcal{T}$.

Si Ω est fini ou dénombrable le choix $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, l'ensemble des parties de Ω , est le plus usuel.

Événements négligeables, événements quasi-certains.

Événements indépendants.

Probabilité conditionnelle.

Rappeler les axiomes vérifiés par une tribu et ceux vérifiés par une probabilité, en particulier l'additivité dénombrable (ou σ -additivité) et la continuité monotone séquentielle de P .

Le choix de tribus dans le cas général n'est pas un objectif du programme.

Propriétés quasi-certaines (on dit aussi presque sûres).

L'indépendance d'une famille $(A_j)_{j \in J}$ est aussi appelée indépendance mutuelle. Elle est définie comme la relation $P(A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_n}) = P(A_{j_1}) \dots P(A_{j_n})$ pour toute partie finie $\{j_1, \dots, j_n\}$ de J .

P_B , probabilité sachant B , est définie lorsque $P(B) \neq 0$.

Notations $P_B(A)$, $P(A|B)$.

3.3.2 Variables aléatoires et lois de variables aléatoires

On appelle variable aléatoire réelle sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ toute application $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, X^{-1}(] - \infty, x]) \in \mathcal{T}.$$

Si A est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ obtenu en opérant par passages au complémentaire, par réunions, par intersections sur une famille finie ou dénombrable d'intervalles de la forme $] - \infty, x]$, $x \in \mathbb{R}$, et si X est une variable aléatoire réelle alors $(X \in A)$ appartient à $\mathcal{T}$. Donc $P(X \in A)$ a un sens.

Si $(X_1, X_2, \dots, X_k)$ est une famille finie de variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ et si $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ est une application continue alors l'application composée $\omega \mapsto f(X_1(\omega), \dots, X_k(\omega))$ est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

Si X est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ et f une application monotone de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, alors l'application composée $f \circ X$ est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ qui converge simplement vers X , une application de Ω vers $\mathbb{R}$. Alors X est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

On appelle loi (relativement à P) de la variable aléatoire réelle X l'application de $\mathcal{I}(\mathbb{R})$ vers $\mathbb{R}$ qui à tout intervalle réel J associe le nombre $P(X \in J)$.

Pour toute partie A de $\mathbb{R}$, $X^{-1}(A)$ est l'image réciproque par X de A , c'est à dire l'ensemble des éléments ω de Ω qui vérifient $X(\omega) \in A$; on la note plus simplement $(X \in A)$.

Pour $A =] - \infty, x]$ cette image réciproque est l'ensemble des éléments ω de Ω qui vérifient $X(\omega) \leq x$; on la note plus simplement $(X \leq x)$.

La tribu borélienne sur $\mathbb{R}$ peut être introduite, mais aucun résultat concernant cette tribu n'est exigible.

C'est le cas, entre autres, pour tout partie A qui est un intervalle réel ou le complémentaire d'un intervalle réel : savoir utiliser les relations suivantes

$$\begin{aligned} (X \in]a, +\infty[) &= \overline{(X \in] - \infty, a])}, \\ (X \in [a, +\infty[) &= \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} (X \in]a - 1/k, +\infty[), \\ (X \in] - \infty, a[) &= \overline{(X \in [a, +\infty[)}, \\ (X \in]a, b]) &= (X \in] - \infty, b]) \setminus (X \in] - \infty, a]), \\ (X \in [a, b]) &= (X \in] - \infty, b]) \setminus (X \in] - \infty, a]), \\ (X \in [a, b[) &= (X \in] - \infty, b[) \setminus (X \in] - \infty, a]), \\ (X \in]a, b[) &= (X \in] - \infty, b[) \setminus (X \in] - \infty, a]). \end{aligned}$$

Notation $f(X_1, \dots, X_k)$.

La preuve de ce résultat n'est pas au programme; on en déduit le fait que la somme, le produit, le minimum, le maximum, ... d'une famille finie de variables aléatoires réelles est une variable aléatoire réelle.

Notation $f(X)$.

Le résultat s'étend au cas où f est monotone par morceaux.

La preuve utilise la définition de limite et les propriétés des tribus.

$\mathcal{I}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble de tous les intervalles de $\mathbb{R}$. C'est un sous ensemble de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

On appelle loi (relativement à P) d'une famille finie $(X_1, \dots, X_k)$ de variables aléatoires réelles l'application de $\mathcal{I}(\mathbb{R})^k$ vers $\mathbb{R}$ qui à tout produit cartésien $J_1 \times \dots \times J_k$ d'intervalles réels associe le nombre

$$P\left(\bigcap_{i=1}^k (X_i \in J_i)\right).$$

Fonction de répartition F_X d'une variable aléatoire réelle X : c'est l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, F_X(t) = P(X \leq t).$$

Propriétés de F_X : c'est une fonction croissante, continue à droite en tout point, de limite 0 en $-\infty$ et de limite 1 en $+\infty$.

La fonction de répartition caractérise la loi d'une variable aléatoire réelle : la connaissance de F_X permet de calculer $P(X \in I)$ pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$.

La continuité de la fonction F_X en t équivaut à $P(X = t) = 0$.

On définit la fonction de répartition d'une famille finie $(X_1, \dots, X_k)$ de variables aléatoires réelles comme étant l'application de $\mathbb{R}^k$ vers $\mathbb{R}$, $(t_1, \dots, t_k) \mapsto P(X_1 \leq t_1, \dots, X_k \leq t_k)$. Les résultats précédents s'étendent au cas d'une famille finie $(X_1, \dots, X_k)$.

Deux familles de lois sont au programme : lois discrètes et lois à densité.

Une variable aléatoire réelle X est dite de loi discrète (relativement à la probabilité P) s'il existe $\Omega' \in \mathcal{T}$ de probabilité 1 tel que $D = X(\Omega')$ soit au plus dénombrable.

On note $(X_1 \in J_1, \dots, X_k \in J_k)$ l'événement

$$\bigcap_{i=1}^k (X_i \in J_i).$$

La réciproque (au sens où toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant ces trois propriétés est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle) n'est pas au programme.

On doit savoir

$$\begin{aligned} P(X \in]a, +\infty[) &= 1 - F_X(a), \\ P(X \in [a, +\infty[) &= 1 - \lim_{a^-} F_X, \\ P(X \in]-\infty, a]) &= \lim_{a^-} F_X, \\ P(X \in]a, b]) &= F_X(b) - F_X(a), \\ P(X \in [a, b]) &= F_X(b) - \lim_{a^-} F_X, \\ P(X \in [a, b]) &= \lim_{b^-} F_X - \lim_{a^-} F_X, \\ P(X \in]a, b]) &= \lim_{b^-} F_X - F_X(a), \\ P(X = a) &= F_X(a) - \lim_{a^-} F_X. \end{aligned}$$

Pas de résultats théoriques au programme dans le cas de plusieurs variables.

On peut supprimer de D tous les éléments x tels que $P(X = x) = 0$; les x restants sont appelées valeurs possibles de la variable discrète X .

On obtient

$$P(X \in A) = \sum_{x \in A} P(X = x).$$

On dit que la loi de X est discrète usuelle s'il existe un intervalle J de $\mathbb{Z}$ et une bijection croissante

$$\varphi : J \rightarrow D, k \mapsto x_k.$$

L'usage est, dans ce cas, de représenter la loi de X par un tableau de lignes comportant en première ligne les x_k , éléments de D , écrits en ordre croissant, en deuxième ligne les probabilités correspondantes $p_k = P(X = x_k)$.

Exemples premiers de lois discrètes.

Une variable aléatoire réelle X est dite de loi à densité (relativement à la probabilité P) si sa fonction de répartition F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ privé d'un sous-ensemble fini F (éventuellement vide).

La densité est une fonction positive, continue sur $\mathbb{R} \setminus F$, d'intégrale convergente et valant 1 sur $\mathbb{R}$.

Exemples premiers de lois continues.

Loi d'une variable aléatoire obtenue par composition.

Une famille $(X_j)_{j \in J}$ de variables aléatoires réelles est dite indépendante si, pour toute famille $(I_j)_{j \in J}$ d'intervalles de $\mathbb{R}$, la famille $((X_j \in I_j))_{j \in J}$ d'événements est indépendante.

La loi de X est caractérisée par la donnée de D et de l'application $x \mapsto P(X = x)$, de D dans $\mathbb{R}$.

Des lignes supplémentaires peuvent donner les cumuls $\sum_{j \leq k} p_j$ ou les produits $x_k p_k$. Il est intéressant d'utiliser un tableur.

Rappeler les lois vues en première année.

Une telle variable aléatoire est dite aussi de loi continue. On appelle alors densité de X la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_X(t) = F'_X(t)$ pour $t \in \mathbb{R} \setminus F$ et $f_X(t) = 0$ pour $t \in F$.

Pour tout intervalle I de borne inférieure $a \in \mathbb{R}$ et de borne supérieure $b \in \mathbb{R}$, on a :

$$P(X \in I) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(t) dt.$$

Loi uniforme sur un segment réel $[a, b]$, loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, loi gamma de paramètre (α, λ) , lois gaussiennes.

Il s'agit d'étudier la loi de $Y = g(X)$ où X est une variable aléatoire de loi connue et g une fonction de la variable réelle, ou plus généralement, celle de $Y = g(X_1, \dots, X_k)$.

Aucun résultat théorique général n'est au programme; les exercices porteront sur des cas simples.

On distinguera l'indépendance de la famille de variables (dite mutuelle parfois) et l'indépendance deux à deux des variables. On notera que l'indépendance d'une famille de variables est relative à une probabilité donnée.

Indépendance héritée : Si la famille $(X_j)_{1 \leq j \leq n_k}$ est indépendante et si $0 < n_1 < \dots < n_k$, alors la famille $(f_1(X_1, \dots, X_{n_1}), f_2(X_{n_1+1}, \dots, X_{n_2}), \dots, f_k(X_{n_{k-1}+1}, \dots, X_{n_k}))$ est indépendante.

Existence d'espaces probabilisés portant une suite $(X_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires réelles indépendantes de lois discrètes données.

Loi conditionnelle de X sachant un événement non négligeable A .

Loi de la somme de variables indépendantes.

Si (X_1, X_2) est un couple de variables aléatoires réelles indépendantes dont les lois sont discrètes d'ensembles de valeurs possibles respectifs D_1 et D_2 (sous ensembles de $\mathbb{R}$ au plus dénombrables), alors la variable aléatoire $S = X_1 + X_2$ est discrète.

Si (X_1, X_2) est un couple de variables aléatoires réelles indépendantes telles que X_1 soit discrète, d'ensemble de valeurs possibles D_1 , et X_2 soit continue, de densité f_2 , alors la variable aléatoire $S = X_1 + X_2$ est à densité.

Si (X_1, X_2) est un couple de variables aléatoires réelles indépendantes dont les lois sont continues, de densités respectives f_1 et f_2 , alors la variable aléatoire $S = X_1 + X_2$ est à densité.

Modélisation du jeu Pile-Face répété (ou infini).

C'est $(P_A)_X$ la loi de X sous la probabilité P_A . On l'utilise notamment dans le cas où (X, Y) est un couple de variables aléatoires réelles discrètes et $A = (Y = t)$, t réel donné.

Proposer de nombreux exemples de somme de variables indépendantes. Dans certains cas, on a une propriété de stabilité : la loi de la somme est du même type. Étudier notamment les cas de lois gaussiennes et de lois de Poisson.

Dans ce cas, l'ensemble des valeurs possibles de S est $D = \{u + v ; (u, v) \in D_1 \times D_2\}$ et la loi de S est donnée, pour tout $s \in D$, par :

$$\begin{aligned} P(S = s) &= \sum_{u \in D_1} P(X_1 = u)P(X_2 = s - u) \\ &= \sum_{v \in D_2} P(X_1 = s - v)P(X_2 = v). \end{aligned}$$

Cette formule est appelée la convolution discrète des lois de X_1 et X_2 .

Dans ce cas, la densité de S est la fonction :

$$f : s \mapsto \sum_{u \in D_1} P(X_1 = u)f_2(s - u).$$

Dans ce cas, la densité de S est la fonction

$$f : s \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(u)f_2(s - u) du.$$

Cette fonction est appelée le produit de convolution des densités f_1 et f_2 .

3.3.3 Espérance, moments

Il est recommandé de proposer ici de nombreux exercices sur des calculs d'espérances, de moments et de variances.

Si X est une variable aléatoire réelle de loi discrète, caractérisée par $(x_k, p_k)_k$, ou continue, de densité f_X , on définit l'espérance de X par la formule

$$E(X) = \begin{cases} \sum x_k p_k & \text{(cas discret)} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t) dt & \text{(cas continu)} \end{cases}$$

sous réserve de la sommabilité (resp. l'intégrabilité sur $\mathbb{R}$) de la famille $(x_k p_k)_k$ (resp. de la fonction $t \mapsto t f_X(t)$).

Espérance de variables aléatoires réelles de lois usuelles.

Propriété de transfert à une variable :

Si X est une variable aléatoire réelle de loi discrète, caractérisée par $(x_k, p_k)_k$, alors la variable aléatoire $Y = g(X)$ admet une espérance si, et seulement si, la famille $(g(x_k) p_k)_k$ est sommable.

Si X est une variable aléatoire réelle continue, de densité f_X , alors la variable aléatoire $Y = g(X)$ admet une espérance si, et seulement si, la fonction $t \mapsto g(t) f_X(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Propriété de transfert à deux variables (cas discret) :

Si (X_1, X_2) est un couple de variables aléatoires réelles de loi discrète (loi conjointe caractérisée par $((x_i, y_j), p_{i,j})_{i,j}$), alors la variable aléatoire $Y = g(X_1, X_2)$ admet une espérance si, et seulement si, la famille $(g(x_i, y_j) p_{i,j})_{i,j}$ est sommable.

Si X et Y sont des variables aléatoires réelles sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, si Y admet une espérance et si $|X| \leq Y$ alors X admet une espérance.

La sommabilité permet de donner une valeur finie qui ne dépend pas d'un ordre choisi des x_k ; l'intégrabilité pour une fonction est l'analogue de la sommabilité pour une famille.

En cas de sommabilité, on a :

$$E(Y) = \sum_k g(x_k) p_k.$$

En cas d'intégrabilité, on a :

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f_X(t) dt.$$

Les démonstrations de ces résultats ne sont pas exigibles dans le cas général. On pourra en revanche traiter des exemples de recherche de l'espérance de $Y = g(X)$; on évitera les exemples inutilement compliqués.

En cas de sommabilité, on a :

$$E(Y) = \sum_{i,j} g(x_i, y_j) p_{i,j}.$$

La démonstration de ce résultat n'est pas exigible dans le cas général. On traitera des exemples simples de recherche de l'espérance de $Y = g(X_1, X_2)$.

Le transfert à deux variables dans le cas continu (à densité) n'est pas au programme.

Résultat admis qui relève en fait de l'intégration de Lebesgue.

Propriétés de l'espérance : Linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire.

Espérance d'un produit de variables aléatoires réelles indépendantes, sous réserve d'existence.

Moments, variance, écart-type, covariance :

Le moment d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$ de X est, sous réserve d'existence, $E(X^k)$.

Si la variable aléatoire réelle X admet un moment d'ordre 2, on appelle variance de X la quantité $V(X) = E((X - E(X))^2)$ et écart-type de X la racine carrée de la variance : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Si X et Y sont des variables aléatoires réelles admettant un moment d'ordre 2, alors :

- la variable aléatoire XY admet une espérance et $E(XY)^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$ (Cauchy-Schwarz) ;

- $S = X + Y$ admet un moment d'ordre 2 et sa variance $V(S)$ est donnée par la formule ci-contre.

Si X et Y sont des variables aléatoires réelles admettant un moment d'ordre 2, on définit la covariance du couple (X, Y) par la formule

$$\begin{aligned} C(X, Y) &= E((X - E(X))(Y - E(Y))) \\ &= E(XY) - E(X)E(Y). \end{aligned}$$

Si X et Y sont des variables aléatoires réelles admettant un moment d'ordre 2 et si ces variables sont indépendantes, leur covariance est nulle.

Corrélation linéaire : Si X et Y sont des variables aléatoires réelles admettant un moment d'ordre 2 de lois non certaines (i.e. variances non nulles), on définit le coefficient de corrélation linéaire du couple (X, Y) par la formule

$$\rho(X, Y) = \frac{C(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Les démonstrations de ces propriétés dans le cas général sont admises. Elles peuvent être présentées dans le cas discret.

Si la variable aléatoire réelle X admet un moment d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$, alors elle admet un moment d'ordre j pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$; de même la variable aléatoire réelle $X + \alpha$ admet un moment d'ordre k , pour tout réel α .

Dans ce cas on a :

- $V(X) \geq 0$ et $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$;

- $V(X) = 0 \Leftrightarrow X$ est constante presque partout ;

- $V(X + \alpha) = V(X)$, pour tout réel α .

$$V(S) = V(X) + V(Y) + 2E((X - E(X))(Y - E(Y))).$$

Avec cette notation on obtient

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2C(X, Y).$$

La variance de la somme est alors la somme des variances.

La réciproque est fautive : covariance nulle n'implique pas indépendance.

Le coefficient de corrélation linéaire du couple (X, Y) est un élément de l'intervalle $[-1, 1]$.

Le cas $\rho = 1$ équivaut à $Y = \alpha X$ avec $\alpha > 0$,

le cas $\rho = -1$ équivaut à $Y = \alpha X$ avec $\alpha < 0$.

L'indépendance de X et Y implique $\rho = 0$, la réciproque est fautive.

Si X admet un moment d'ordre 1, on appelle variable centrée associée à X la variable aléatoire réelle $\tilde{X} = X - E(X)$.

Si X admet un moment d'ordre 2, on appelle variable centrée réduite associée à X la variable aléatoire réelle $X^* = \frac{1}{\sigma(X)}(X - E(X))$.

3.3.4 Fonctions génératrices

Fonction génératrice d'une variable aléatoire réelle X à valeurs dans $\mathbb{N}$:

$$G_X(t) = E(t^X) = \sum_{k \in \mathbb{N}} t^k P(X = k).$$

La loi de X est caractérisée par G_X (pour X à valeurs dans $\mathbb{N}$).

Lien entre fonction génératrice et moments : la variable aléatoire X admet une espérance si, et seulement si, G_X est dérivable en 1, auquel cas $E(X) = G'_X(1)$; la variable aléatoire X admet un moment d'ordre 2 si, et seulement si, G_X admet une dérivée seconde en 1, auquel cas $E(X^2) - E(X) = G''_X(1)$.
Fonction génératrice d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.

La série entière définissant G_X est de rayon de convergence supérieur ou égal à 1 et $G_X(1) = 1$; cette série converge normalement sur le disque fermé de centre 0 et de rayon 1.

La fonction G_X est continue sur $[-1, 1]$ et est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, 1[$.

On pourra présenter la notion de transformée de Laplace-Fourier dans le cas d'une loi à densité mais aucun résultat n'est au programme concernant ces transformations.

Les élèves doivent savoir retrouver l'expression de la variance de X à l'aide de $G'_X(1)$ et $G''_X(1)$. Les élèves doivent savoir calculer la fonction génératrice d'une variable aléatoire de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson.

Expression de la fonction génératrice de la variable aléatoire $X_1 + \dots + X_n$ quand les X_i sont indépendantes.

3.3.5 Inégalités, notions de convergence et théorèmes limites

Inégalité de Markov : Si X est une variable aléatoire réelle positive admettant une espérance, alors, pour tout $\alpha > 0$,

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{E(X)}{\alpha}.$$

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev : Si X est une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 2, alors, pour tout $\beta > 0$,

$$P(|X - E(X)| \geq \beta) \leq \frac{V(X)}{\beta^2}.$$

Cette inégalité permet de démontrer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Interprétation : la variance permet de contrôler l'écart entre X et sa valeur moyenne $E(X)$.

Inégalité de Jensen : Si X est une variable aléatoire réelle admettant une espérance, si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une application convexe sur $\mathbb{R}$ et si $Y = f(X)$ admet une espérance, alors

$$f(E(X)) \leq E(f(X)).$$

Définition de la convergence en probabilité d'une suite $(X_n)_n$ de variables aléatoires réelles vers une variable aléatoire réelle Y :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|Y - X_n| \geq \varepsilon) = 0.$$

Définition de la convergence en loi d'une suite $(X_n)_n$ de variables aléatoires réelles vers une variable aléatoire réelle Y :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus D_Y, \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(t) = F_Y(t),$$

où D_Y désigne l'ensemble des points de discontinuité de la fonction F_Y .

Si les variables aléatoires X_n ainsi que Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, la convergence en loi de la suite $(X_n)_n$ vers Y équivaut à :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = P(Y = k).$$

La convergence en probabilité implique la convergence en loi. La réciproque est fausse.

Loi faible des grands Nombres : si $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, admettant un moment d'ordre 2, alors

la suite $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k\right)_{n \geq 1}$, de variables aléatoires, converge en probabilité vers la variable constante $\mu = E(X_1)$.

Démonstration uniquement dans le cas où la loi de X est discrète.

Si la suite de fonctions $(f_k)_k$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers g , la suite de variables aléatoires réelles $(f_k(X))_k$ converge en probabilité vers $g(X)$.

En fait la limite d'une convergence en loi est la loi de Y .

Exemple à connaître : soit $\lambda > 0$ et soit $(p_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels positifs telle que la suite $(np_n)_{n \geq 1}$ converge vers λ ; si, pour tout $n \geq 1$, X_n est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètre (n, p_n) alors la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers la variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ .

Interprétation de la loi de Poisson comme loi des événements rares.

Résultat admis.

Application : interprétation fréquentiste de $P(A)$.

Théorème de la limite centrée : si $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, admettant un moment d'ordre 2, alors la suite $\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^n X_k - n\mu\right)\right)_{n \geq 1}$, où $\mu = \mathbb{E}(X_1)$ et $\sigma = \sigma(X_1)$, converge en loi vers la variable aléatoire suivant la loi gaussienne standard.

la vitesse de convergence de la loi des grands nombre est donc en $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Ce théorème admet de nombreuses applications, notamment en statistiques ; elles ne sont pas au programme.

3.4 Équations différentielles linéaires

Ce chapitre a pour objectifs d'introduire quelques notions de base sur les équations différentielles non linéaires et d'étudier les équations différentielles linéaires. L'introduction du cas non linéaire vise à éclairer les résultats du cas linéaire en montrant leurs spécificités ; elle sert aussi pour préparer les élèves aux enseignements dispensés dans les cursus post classes préparatoires.

Le chapitre est organisé autour des axes suivants :

- *introduire quelques notions de base sur les équations différentielles non linéaires et familiariser les élèves avec ces notions en mettant en œuvre les résultats du cours sur des exemples simples ;*
- *étudier les systèmes d'équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 ;*
- *étudier le cas particulier des systèmes d'équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 à coefficients constants, en relation avec la réduction des matrices ;*
- *étudier les équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 et 2.*

La résolution explicite des systèmes linéaires à coefficients constants n'est pas un objectif du programme. On limitera en conséquence la technicité des exercices d'application. On pourra en revanche présenter aux élèves divers exemples d'études qualitatives d'équations différentielles linéaires scalaires ou de systèmes linéaires. Concernant les systèmes à coefficients constants, on pourra souligner le rôle du signe des parties réelles des valeurs propres de la matrice et son influence sur le comportement des solutions ; on pourra également, en dimension 2, représenter certaines des courbes intégrales.

Il est attendu qu'à l'issue de ce chapitre, les élèves

- *aient traité des exemples de recherche et d'étude de courbes intégrales d'un champ linéaire de vecteurs dans le plan ;*
- *maîtrisent la pratique de la résolution d'une équation différentielle du type $X' = AX$, où A est une matrice à coefficients réels ou complexes, par réduction de A à une forme diagonale (ou triangulaire en dimension ≤ 3) ;*
- *aient pratiqué, sur des exemples, l'étude d'équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 ou 2 et notamment la recherche de solutions développables en série entière ainsi que les problèmes de raccordements de solutions.*

Dans ce chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

3.4.1 Généralités

Équation différentielle générale $x' = f(t, x)$. Solution d'une telle équation.

Problème de Cauchy.

Méthode d'Euler pour la recherche de solutions approchées.

L'application $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est donnée, où U est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, on cherche les couples (J, x) où J est un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et x une application dérivable de J dans $\mathbb{R}^n$ vérifiant :

$$\forall t \in J, (t, x(t)) \in U \text{ et } x'(t) = f(t, x(t)).$$

Cas des équations différentielles à variables séparables : $n = 1$ et $f(t, u) = a(t)b(u)$.

Pas de résultat général exigible; les élèves doivent savoir traiter des exemples simples. Le raisonnement par analyse-synthèse est souvent utile ici.

Théorème de Cauchy-Lipschitz : résultat d'existence et d'unicité locale.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz est admis et il n'est pas le point central du paragraphe, il est présenté pour préparer les élèves au cas non linéaire qui sera traité dans les cursus post classes préparatoires. Il peut aussi servir à éclairer les résultats du cas linéaire en montrant leurs spécificités.

3.4.2 Équations différentielles linéaires, solutions, structures

Équation différentielle linéaire.

Équation différentielle homogène associée.

Solution d'une équation différentielle linéaire, solution globale.

Forme des solutions.

Elle est de la forme $X' = A(t)X + B(t)$ où $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont continues
Principe de superposition.

Somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.

Problème de Cauchy; solution d'un problème de Cauchy.

Équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n à coefficients continus.

Équation différentielle homogène associée.

Elle est de la forme

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t).$$

Représentation d'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n par un système différentiel linéaire.

Solution d'une telle équation, problème de Cauchy associé.

Forme des solutions.

Les élèves doivent savoir écrire une telle équation sous la forme d'un système différentiel $X' = A(t)X + B(t)$.

Somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.

Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution globale d'un problème de Cauchy associé à un système différentiel linéaire $X' = A(t)X + B(t)$, unicité locale des solutions.

La démonstration est hors programme. Adaptation aux équations différentielles linéaires scalaires d'ordre n ; méthode d'Euler pour la recherche d'une solution approchée d'un problème de Cauchy.

Cas des équations homogènes : l'ensemble des solutions globales est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$. Dimension de l'espace des solutions globales.

Pour t_0 dans I , l'application $X \mapsto X(t_0)$ est un isomorphisme de cet espace sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Cas des équations scalaires homogènes d'ordre n : espace vectoriel des solutions, dimension.

Structure de l'ensemble des solutions globales d'une équation différentielle linéaire avec second membre.

Adaptation aux équations différentielles linéaires scalaires d'ordre n .

La recherche d'une solution particulière de l'équation complète doit comporter des indications.

Exemples d'équations scalaires d'ordre 1 (resp. 2) non résolues en y' (resp. y'') :

Les élèves doivent savoir exploiter la recherche de solutions développables en série entière.

$$a(t)x'(t) + b(t)x(t) = c(t),$$

Exemples d'étude de problèmes de raccordements de solutions.

$$a(t)x''(t) + b(t)x'(t) + c(t)x(t) = d(t).$$

3.4.3 Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants

Système différentiel linéaire à coefficients constants $X' = AX$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: étude lorsque A est une matrice diagonalisable.

Comportement asymptotique des solutions en fonction du spectre de A .

Exemples de calculs explicites de solutions.

On se limite aux deux cas : A diagonalisable ou $n \leq 3$.

3.5 Fonctions holomorphes

L'objectif de ce chapitre est d'étudier la dérivation complexe et les fonctions holomorphes puis établir le principe du prolongement analytique et le principe des zéros isolés.

Il est attendu qu'à l'issue de ce chapitre, les élèves acquièrent des notions de base de l'analyse complexe notamment à travers l'étude d'exemples.

Dans ce qui suit, Ω désigne un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et $\tilde{\Omega} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + iy \in \Omega\}$; $\tilde{\Omega}$ est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$.

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une application; on note $\tilde{f}$ l'application définie sur $\tilde{\Omega}$ par $\tilde{f}(x, y) = f(x + iy)$ et on pose $u(x, y) = \operatorname{Re}(\tilde{f}(x, y))$ et $v(x, y) = \operatorname{Im}(\tilde{f}(x, y))$, $(x, y) \in \tilde{\Omega}$.

Pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$ et tout $r \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, on pose $D(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < r\}$.

Dérivation complexe.

Si f est $\mathbb{C}$ -dérivable en $z_o = x_o + iy_o$ alors les fonctions u et v possèdent des dérivées partielles d'ordre 1 en (x_o, y_o) et

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x_o, y_o) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_o, y_o), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_o, y_o) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_o, y_o). \end{cases}$$

Fonction holomorphe sur Ω .

f est holomorphe sur Ω si, et seulement si, les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\tilde{\Omega}$ et vérifient les équations de Cauchy-Riemann.

Toute fonction polynomiale est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et sa dérivée au sens complexe coïncide avec sa dérivée algébrique.

Plus généralement, si $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f , alors f est holomorphe sur $D(0, R)$ et l'on a

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}, \quad z \in D(0, R).$$

L'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω est une sous-algèbre de la $\mathbb{C}$ -algèbre des applications de Ω dans $\mathbb{C}$; on la note $\mathcal{H}(\Omega)$.

Fonction analytique sur Ω :

Une application $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est dite analytique sur Ω si elle est développable en série entière autour de tout point de Ω .

Si $0 < r < +\infty$, $D(z_0, r)$ est le disque ouvert de centre z_0 et de rayon r ; par abus de langage, on dira que $\mathbb{C}$ est le disque ouvert de rayon $+\infty$.

Une application $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est dite $\mathbb{C}$ -dérivable en $z_o \in \Omega$ si $\lim_{\substack{z \rightarrow z_o \\ z \neq z_o}} \frac{f(z) - f(z_o)}{z - z_o}$ existe, auquel cas elle est notée $f'(z_o)$.

Les équations $\frac{\partial u}{\partial x}(x_o, y_o) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_o, y_o)$ et $\frac{\partial u}{\partial y}(x_o, y_o) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_o, y_o)$ sont dites équations de Cauchy-Riemann.

On dit que f est holomorphe sur Ω si elle est $\mathbb{C}$ -dérivable en tout point de Ω et si la fonction $z \mapsto f'(z)$ est continue sur Ω ; la fonction $z \mapsto f'(z)$ est alors appelée la dérivée de f , notée f' .

On peut démontrer ce résultat par un calcul direct en utilisant le théorème de dérivation de la somme d'une série d'applications de classe $\mathcal{C}^1$.

Il en résulte que f est indéfiniment $\mathbb{C}$ -dérivable sur $D(0, R)$ et qu'on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{f^{(k)}(z)}{k!} = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} a_n z^{n-k}, \quad z \in D(0, R).$$

La dérivation est linéaire et vérifie la formule de Leibniz $(fg)' = f'g + fg'$ pour f, g holomorphes sur Ω ; de plus, si f_1 est holomorphe sur un ouvert Ω_1 et si f_2 est holomorphe sur un ouvert Ω_2 contenant $f_1(\Omega_1)$, alors $f_2 \circ f_1$ est holomorphe sur Ω_1 et $(f_2 \circ f_1)' = (f_2' \circ f_1)f_1'$.

Pour tout $z_0 \in \Omega$, il existe un réel $r > 0$ et une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence $\geq r$ tels qu'on ait $D(z_0, r) \subset \Omega$ et

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in D(z_0, r).$$

Toute fonction polynomiale est analytique sur $\mathbb{C}$.

La fonction exponentielle est analytique sur $\mathbb{C}$.

Plus généralement, la somme d'une série entière est analytique sur son disque ouvert de convergence.

L'ensemble des fonctions analytiques sur Ω est une sous-algèbre de la $\mathbb{C}$ -algèbre des applications de Ω dans $\mathbb{C}$; on la note $\mathcal{O}(\Omega)$.

Toute fonction f analytique sur Ω est holomorphe sur Ω : $\mathcal{O}(\Omega) \subset \mathcal{H}(\Omega)$.

Formule de Taylor algébrique.

$$e^z = e^{z_0} e^{z-z_0} = e^{z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^n}{n!}, \quad z_0, z \in \mathbb{C}.$$

Résultat admis.

f est de plus indéfiniment $\mathbb{C}$ -dérivable sur Ω et, pour tout $z_0 \in \Omega$, le développement de f autour de z_0 est donné par sa série de Taylor en z_0 , c'est à dire

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n,$$

valable dans le plus grand disque ouvert de centre z_0 contenu dans Ω .

Toute fonction f holomorphe sur Ω est analytique sur Ω : $\mathcal{H}(\Omega) \subset \mathcal{O}(\Omega)$. Plus précisément, pour tout $z_0 \in \Omega$, si $D(z_0, R)$ désigne le plus grand disque ouvert de centre z_0 inclus dans Ω , il existe une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ de nombres complexes, uniquement déterminée, telle que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ soit $\geq R$ et qu'on ait

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \quad z \in D(z_0, R).$$

La démonstration de ce résultat est hors programme.

Principe du prolongement analytique : Soit g une fonction holomorphe sur un ouvert non vide Ω_1 ; s'il existe un ouvert convexe Ω contenant Ω_1 et une fonction f holomorphe sur Ω et prolongeant g , alors f est unique.

On en déduit que si f est une fonction holomorphe sur Ω , ouvert convexe, et s'il existe $z_0 \in \Omega$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(z_0) = 0$, alors f est nulle sur Ω .

Principe des zéros isolés : soit f une fonction *non nulle* et holomorphe sur Ω , ouvert convexe; si z_0 est un point de Ω tel que $f(z_0) = 0$ alors, il existe $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \subset \Omega$ et que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$.