ENS MP 2010 corrigé

Partie 1 :

$\boxed{1a}$ On remplace la « ligne n » par la « ligne n moins λ_1 fois la ligne n-1 » ; puis la « ligne n-1 » par la « ligne n-1 moins λ_1 fois la ligne n-2 » ; … ; puis la ligne 2 par la « ligne 2 moins λ_1 fois la ligne 1 ». Le déterminant est inchangé.

$\boxed{1b}$ On procède par récurrence en utilisant le 1a et en développant par rapport à la première colonne.

$\boxed{2}$ Si $\sum_{k=1}^{k=n} a_k f_k = 0$, alors en dérivant p fois, on obtient : $\sum_{k=1}^{k=n} a_k \lambda_k{}^p f_k = 0$.

Et en prenant la valeur en 0 : Pour tout entier p, $\sum_{k=1}^{k=n} a_k \lambda_k{}^p = 0$.

Pour $0 \le p \le n-1$, ceci se traduit matriciellement par : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_{n-1} & \lambda_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1{}^{n-1} & \lambda_2{}^{n-1} & \cdots & \lambda_{n-1}{}^{n-1} & \lambda_n{}^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Les λ_k sont deux à deux distincts, donc la matrice précédente est inversible.
(Son déterminant est non nul d'après la question 1b.)
Donc les a_k sont tous nuls. La famille est libre.

Partie 2 :

$\boxed{1}$ La matrice K a N colonnes, donc $\text{rang}(K) \le N$. Si rang(K) < N, alors dim(ker(K)) = N – rang(K) > 0.
(Théorème du rang ; l'ensemble de départ est $\mathbb{C}^N$)
Soit $y \in \ker(K)$, non nul. Ky = 0, donc pour tout $k \in \{0,...,N-1\}$, $BA^k y = 0$.
Ceci contredit l'hypothèse **[c]**.

$\boxed{2}$ Le noyau de K est réduit à $\{0\}$. (théorème du rang)
Si y est un vecteur propre de A et appartient au noyau de B, alors By = 0 ; BAy = 0 ;…
Et donc, y est dans le noyau de K. Ceci contredit l'hypothèse **[d]**.

$\boxed{3a}$ On effectue la division euclidienne de X^k par le polynôme caractéristique de A (appelé χ_A)
$X^k = \chi_A(X) \bullet Q_k(X) + P_k(X)$ où $\deg(P_k) < \deg(\text{car}(A)) = N$.
On prend alors la valeur en A : On obtient $A^k = P_k(A)$. (Caley-Hamilton)

$\boxed{3b}$ Soit $y \in \mathbb{C}^N - \{0\}$. Si $BA^k y = 0$ pour tout k < N, alors si $k \ge N$, $BA^k y = BP_k(A)y = 0$.

Donc, $B\exp(At)y = \sum_0^{+\infty} B\frac{A^k t^k}{k!} y = 0$.
Ceci contredit l'hypothèse **[b]**.

$\boxed{4}$ Si y est un vecteur propre associé à λ pour la matrice A, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k y = \lambda^k y$; et donc y est un vecteur propre associé à $e^{t\lambda}$ pour la matrice exp(tA).

Comme A est diagonalisable, $A = \bigoplus_{i=1}^{p} \text{Ker}(A - \lambda_i I_N)$ où $\lambda_1, \dots \lambda_p$ sont les p valeurs propres distinctes de A.

Soit $y \in \mathbb{C}^N$ tel que $B\exp(At)y = 0$, $\forall t \in [0,+\infty[$.

$y=\sum_{i=1}^{p} y_i$ où y_i **est un vecteur propre associé à** λ_i **pour la matrice A.**

$B\exp(At)y = B(\sum_{i=1}^{p} e^{t\lambda_i} y_i) = \sum_{i=1}^{p} e^{t\lambda_i} By_i = 0.$

Donc, d'après la question I2, la famille des $\exp(\lambda_i \bullet)$ étant libre, $By_i = 0$, pour tout i.
Donc y_i **est dans le noyau de B**, pour tout i.
D'après l'hypothèse **[a]**, $y_i = 0$, pour tout i. Donc y = 0.
Le seul vecteur pour lequel l'application du **[b]** est identiquement nulle est le vecteur nul.

$\boxed{5}$ On a montré dans un premier temps que : $[b] \Rightarrow [c] \Rightarrow [d] \Rightarrow [a]$.
Puis, que : Si A est diagonalisable, alors $[a] \Leftrightarrow [b] \Leftrightarrow [c] \Leftrightarrow [d]$

Partie 3 : On suppose que $A^* = {}^t\overline{A} = -A$**, et donc que A est diagonalisable.**

$\boxed{1}$ $z = \langle AX, X\rangle = \overline{\langle X, AX\rangle} = \overline{\langle A^*X, X\rangle} = \overline{\langle -AX, X\rangle} = -\overline{\langle AX, X\rangle} = -\overline{z}$.
Donc $\langle AX, X\rangle$ est un imaginaire pur.
Si X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ, alors
$\langle AX, X\rangle = \langle \lambda X, X\rangle = \lambda\langle X, X\rangle$ est imaginaire pur et $\langle X, X\rangle$ est réel, donc λ est imaginaire pur.

$\boxed{2}$ <u>remarque</u> : Si $C \in M_N(\mathbb{C})$, on utilise la formule $\frac{d}{dt}\big(\exp(Ct)\big) = C\exp\big(Ct\big)$.
Il est alors facile de vérifier que $\boxed{X(t) = \exp\big((A - B^*B)t\big)X_0}$ convient.
Son unicité découle de Cauchy- Lipschitz. ($f(t, X) = \big(A - B^*B\big)X$ est lipschitzienne en X (on utilise la norme linéaire))

$$\boxed{3}\ \frac{d}{dt}\|X(t)\|^2 = \frac{d}{dt}\langle X(t), X(t)\rangle = \left\langle \frac{d}{dt}X(t), X(t)\right\rangle + \left\langle X(t), \frac{d}{dt}X(t)\right\rangle = 2\,\mathrm{Re}\left\langle \frac{d}{dt}X(t), X(t)\right\rangle$$
$$= 2\,\mathrm{Re}\langle (A - B^*B)X(t), X(t)\rangle = 2\,\mathrm{Re}\langle AX(t), X(t)\rangle - 2\,\mathrm{Re}\langle B^*BX(t), X(t)\rangle$$
$$= 0 - 2\,\mathrm{Re}\langle BX(t), BX(t)\rangle = -2\|BX(t)\|^2 \qquad (\text{car } B^{**} = B).$$

L'application $t \to \|X(t)\|^2$ est donc décroissante. (sa dérivée est négative.)
Ainsi, $\forall t \in [0, +\infty[$, $\|X(t)\|^2 \le \|X(0)\|^2 = \|X_0\|^2$.
Donc $\left\|\exp\big((A - B^*B)t\big)X_0\right\| \le \|X_0\|$ pour tout X_0. Ainsi $\left\|\left\|\exp(A - B^*B)t\right\|\right\| \le 1$.

$\boxed{4}$ L'application $t \mapsto \|X(t)\|$ est décroissante et minorée (par 0), donc elle a une limite L.

$\boxed{5a}$ L'application $t \mapsto \|X(t)\|^2$ est constante, donc sa dérivée est nulle.
Donc $-2\|BX(t)\|^2 = 0$, pour tout $t \in [0, +\infty[$. BX(t) = 0.

$\boxed{5b}$ Comme BX(t)=0 : l'équation (1) devient : $(1)'\ \frac{dX}{dt}(t) = AX(t)$ et $X(0) = X_0$, et la solution est donc :
$X(t)=\exp(At)X_0$ (Résultat de la question III2)
Donc $B\exp(At)X_0 = 0$. Et comme $a \Leftrightarrow b$ (Q II5) : $\mathbf{X_0 = 0}$.
Comme $L \in [0, \|X_0\|]$, **L = 0**.

$\boxed{6a}$ L'application $t \mapsto \|X(t)\|$ arrive dans le compact $[0, \|X_0\|]$.

La suite $X(t_k)$ est donc dans la boule fermée de rayon $\|X_0\|$, qui est, elle aussi compacte.
Elle a donc une valeur d'adhérence dans cette boule. On l'appelle ξ_0.

$\boxed{6b}$ $X(t_{\varphi(k)}+t)=\exp\left((A-B^*B)(t_{\varphi(k)}+t)\right)X_0=\exp\left((A-B^*B)t\right)\exp\left((A-B^*B)t_{\varphi(k)}\right)X_0$

(car $(A-B^*B)t$ et $(A-B^*B)t_{\varphi(k)}$ commutent.)

$$=\exp\left((A-B^*B)t\right)X(t_{\varphi(k)})\xrightarrow[k\to+\infty]{}\exp\left((A-B^*B)t\right)\xi_0=\xi(t).$$

(car $\exp\left(\left(A-B^*B\right)t\right)$ est continue.)

$\boxed{6c}$ $t\to\|X(t)\|$ est décroissante, et $\|X(t_{\varphi(k)})\|\xrightarrow[k\to+\infty]{}\|\xi_0\|$. Donc $\|X(t)\|\xrightarrow[t\to+\infty]{}\|\xi_0\|$.
De plus, $\|X(t_{\varphi(k)}+t)\|\xrightarrow[k\to+\infty]{}\|\xi(t)\|$. Donc $\|\xi(t)\|=\|\xi_0\|$, pour tout t.
On peut donc appliquer le résultat de la Q 5b. L=0.

$\boxed{7a}$ On doit sans doute trouver plus simple, mais bon, voilà :
On procède par l'absurde. On suppose donc que $\left\|\|\exp(A-B^*B)t\|\right\|$ ne tend pas vers 0.
Il existe $\varepsilon>0$ tel que, pour tout entier n, il existe t_n tel que $\operatorname{Sup}_{\|X\|=1}\|\exp(A-B^*B)t_nX\|>\varepsilon$.
(remarque : La définition de l'énoncé de la norme linéaire est équivalente à celle utilisée ici.)
Il existe alors X_n tel que $\|X_n\|=1$ et $\|\exp(A-B^*B)t_nX_n\|>\varepsilon$.
La sphère de rayon 1 étant compacte, on extrait une sous-suite $(X_{\varphi(n)})$ de (X_n) convergeant vers X_0, de norme 1. On choisit N tel que si $\varphi(n)>N$, alors $\|X_{\varphi(n)}-X_0\|<\frac{\varepsilon}{2}$. Soit n > N.

$X_{\varphi(n)}=X_{\varphi(n)}-X_0+X_0$, donc,

$\varepsilon<\|\exp(A-B^*B)t_{\varphi(n)}X_{\varphi(n)}\|\le\|\exp(A-B^*B)t_{\varphi(n)}(X_{\varphi(n)}-X_0)\|+\|\exp(A-B^*B)t_{\varphi(n)}X_0\|$.

Donc $\varepsilon\le\left\|\|\exp(A-B^*B)t_{\varphi(n)}X_{\varphi(n)}\|\right\|\bullet\|X_{\varphi(n)}-X_0\|+\|\exp(A-B^*B)t_{\varphi(n)}X_0\|$.

Enfin, $\varepsilon\le1\bullet\frac{\varepsilon}{2}+\|\exp(A-B^*B)t_{\varphi(n)}X_0\|$.

Donc, $\frac{\varepsilon}{2}\le\|\exp(A-B^*B)t_{\varphi(n)}X_0\|$, pour tout n tel que $\varphi(n)>N$.

Ceci contredit le fait que $\|\exp(A-B^*B)tX_0\|\to0$.(Q III4+6c)

$\boxed{7b}$ Soit X_k (de norme 1) un vecteur propre de M pour la valeur propre λ_k.
$\|\exp(Mt)X_k\|=\|e^{\lambda_kt}X_k\|=|e^{\lambda_kt}|$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$, donc $\mathrm{Re}(\lambda_k)<0$.

$\boxed{7c}$ On suppose que $Y\in\mathrm{Ker}(M-\lambda_kI_N)^{m_k}$.

Soit $f(t)=\left(\sum_{p=0}^{m_k-1}\frac{1}{p!}(M-\lambda_kI_N)^pt^p\right)e^{\lambda_kt}Y$. Montrons que f est solution du système : $\begin{cases}X'(t)=MX(t)\\X(0)=Y\end{cases}$.

Ainsi, f sera égale à exp(Mt)Y, qui est l'unique solution du système précédent.

$f(0)=I_Ne^0Y=Y$. C'est un bon début.

$Mf(t)=(M-\lambda_kI_N)f(t)+\lambda_kI_Nf(t)=\left(\sum_{p=0}^{m_k-1}\frac{1}{p!}(M-\lambda_kI_N)^{p+1}t^p\right)e^{\lambda_kt}Y+\lambda_kf(t)$.

$$=\left(\sum_{p=1}^{m_k}\frac{1}{(p-1)!}(M-\lambda_kI_N)^pt^{p-1}\right)e^{\lambda_kt}Y+\lambda_kf(t).$$

Or, $(M-\lambda_kI_N)^{m_k}Y=0$ car $Y\in\mathrm{Ker}(M-\lambda_kI_N)^{m_k}$.

Donc, $\mathrm{Mf}(t) = \left(\sum_{p=1}^{m_k-1} \frac{1}{(p-1)!}(M-\lambda_k I_N)^p t^{p-1}\right) e^{\lambda_k t} Y + \lambda_k f(t)$

D'autre part, f '(t) = $\left(\sum_{p=1}^{m_k-1} \frac{1}{(p-1)!}(M-\lambda_k I_N)^p t^{p-1}\right) e^{\lambda_k t} Y + \lambda_k f(t)$. C'est gagné !

On a exhibé le polynôme Q_k de l'énoncé.

Si $Y \in \mathbb{C}^N$, On peut décomposer Y de façon unique en : $Y = \sum_{k=1}^{n} Y_k$.

On peut aussi vérifier que $\|Y\|_2 = \sup_k(\|Y_k\|)$ est une norme sur $\mathbb{C}^N$. (facile)

Les deux normes $\| \ \|$ et $\| \ \|_2$ sont équivalentes.

Il existe donc a, indépendant de Y tel que $\|Y\|_2 \le a\|Y\|$, pour tout Y.

On peut passer aux choses sérieuses :

Soit $Y \in \mathbb{C}^N$, $\|\exp(Mt)Y\| = \left\|\exp(Mt)(\sum_{k=1}^{n} Y_k)\right\| \le \sum_{k=1}^{n}\|\exp(Mt)Y_k\| = \sum_{k=1}^{n}\left\|e^{y_k t}Q_k(t)Y_k\right\|$

$$\le \sum\left|e^{\lambda_k t}\right| \left\|\left|Q_k(t)\right|\right\| \bullet \|Y_k\| \le N \sup_k\left|e^{\lambda_k t}\right| \bullet \sup_k\left|Q_k(t)\right| \bullet \|Y\|_2$$

$$\le aN \sup_k\left|e^{\lambda_k t}\right| \bullet \sup_k\left|Q_k(t)\right| \bullet \|Y\|$$

Il suffit de prendre c plus petit que l'opposé de la plus petite partie réelle des λ_k .

On conclut avec le théorème des croissances comparées.

$\boxed{8}$ Si X est dans le noyau de A et de B, alors

$\exp(A-B^*B)tX = \sum_{0}^{+\infty}\frac{1}{k!}(A-B^*B)^k tX = tX + 0 + ... + 0 + ... = tX$.

Donc $\left\|\left|\exp(A-B^*B)t\right|\right\| \ge t$, donc ne peut tendre vers 0.

L'hypothèse **[a]** est donc nécessaire.

Partie 4 :

$\boxed{1}$ Sans difficulté.

$\boxed{2}$ $c_k(\omega_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega_0(t)e^{-ikt}dt.$

On fait deux intégrations par parties successives. On obtient le résultat demandé.

(le fait que les fonctions arrivent dans $\mathbb{C}^N$ ne pose pas de problème.)

Comme $\frac{d^2\omega_0}{dt^2}$ est continue, $\sum\left\|c_k\left(\frac{d^2\omega_0}{dt^2}\right)\right\|^2$ converge. (Parseval, la continuité par morceaux suffit.)

$\sum\frac{1}{k^2}$ CV (Riemann) et $\sum\left\|c_k\left(\frac{d^2\omega_0}{dt^2}\right)\right\|^2$ CV.

Donc, $\sum\frac{1}{k}\left\|c_k\left(\frac{d^2\omega_0}{dt^2}\right)\right\|$ CV. (Schwarz : $\left(\sum a_k b_k\right)^2 \le \left(\sum a_k{}^2\right)\left(\sum b_k{}^2\right)$)

Donc, $\sum\|kc_k(\omega_0)\|$ CV.

$\boxed{3}$ On note $f_k(t,x) = \exp\left[\left(ikA - B^*B\right)t\right]c_k(\omega_0)e^{ikx}$

$\left\|\exp\left[\left(ikA - B^*B\right)t\right]\right\| \leq 1$, donc $\|f_k(t,x)\| \leq \|c_k(\omega_0)\|$.

$\sum\|c_k(\omega_0)\|$ CV, donc $\sum f_k(t,x)$ CVN par rapport à x et à t.

$\dfrac{\partial}{\partial x} f_k(t,x) = \exp\left[\left(ikA - B^*B\right)t\right]c_k(\omega_0)ike^{ikx}$, donc $\left\|\dfrac{\partial}{\partial x} f_k(t,x)\right\| \leq \|kc_k(\omega_0)\|$.

$\sum\|kc_k(\omega_0)\|$ CV, donc $\sum \dfrac{\partial}{\partial x} f_k(t,x)$ CVN par rapport à x.

$\omega = \sum f_k$ est donc dérivable par rapport à x et $\dfrac{\partial}{\partial x}\omega(t,x) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \exp\left[\left(ikA - B^*B\right)t\right]c_k(\omega_0)ike^{ikx}$.

ω est aussi dérivable par rapport à t, et avec la question III2 :

$\dfrac{\partial}{\partial t}\exp\left[\left(ikA - B^*B\right)t\right]c_k(\omega_0)e^{ikx} = \left(ikA - B^*B\right)\exp\left[\left(ikA - B^*B\right)t\right]c_k(\omega_0)e^{ikx}$,

Ainsi, $\left\|\dfrac{\partial}{\partial t} f_k\right\| \leq \left\|ikA - B^*B\right\| \bullet \left\|\exp[...]\right\| \bullet \|c_k(\omega_0)\| \leq \left(|k|\,\|A\| + \|B^*B\|\right) \bullet 1 \bullet \|c_k(\omega_0)\|$.

$\sum\|kc_k(\omega_0)\|$ et $\sum\|c_k(\omega_0)\|$ CV, donc $\sum \dfrac{\partial}{\partial t} f_k(t,x)$ CVN. Donc ω est aussi dérivable par rapport à t et : $\dfrac{\partial}{\partial t}\omega(t,x) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\left(ikA - B^*B\right)\exp\left[\left(ikA - B^*B\right)t\right]c_k(\omega_0)e^{ikx}$.

Ainsi s'achève la démonstration du premier résultat du (4).

$f_k(t, x + 2\pi) = f_k(t,x)$, donc $\omega(t, x+2\pi) = \omega(t,x)$

$\sum f_k(t,x)$ CVU par rapport à x sur $[0,2\pi]$, (car normalement)

et les f_k sont continues donc intégrables sur $[0,2\pi]$.

On peut donc intervertir le signe $\sum$ et le symbole $\int$.

Or, $\displaystyle\int_0^{2\pi} f_k(t,x)dx = \left[\exp\left[\left(ikA - B^*B\right)t\right]c_k(\omega_0)\frac{e^{ikx}}{ik}\right]_0^{2\pi} = 0$, pour $k \neq 0$.

De plus, $c_0(\omega_0) = 0$: $f_0(t,x) = 0$. Le troisième résultat du (4) vient de tomber.

$\omega(0,x) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k(\omega_0)e^{ikx} = \omega_0(x)$ (Théorème de Dirichlet)

$\boxed{4}$ $\displaystyle\int_0^{2\pi}\|\omega(t,x)\|^2 dx = \int_0^{2\pi}\left\|\sum f_k(t,x)\right\|^2 dx \leq \int_0^{2\pi}\left(\sum\|f_k(t,x)\|\right)^2 dx \leq \left\|\exp[...]\right\|^2 \bullet \left(\sum\|c_k(\omega_0)\|\right)^2 2\pi$

Or, $\left\|\exp[(ikA - B^*B)t]\right\|^2 \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ (Question 7a, car iA et B vérifient la propriété a.)

Donc, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\int_0^{2\pi}\|\omega(t,x)\|^2 dx = 0$.

Partie 5 :

$\boxed{1}$ <u>Première méthode</u> (de Julie Gauthier, Dijon) :

On montre que $\varphi : Y \to \sqrt{\|BY\|^2 + \|BAY\|^2}$ est une norme :

Pour l'inégalité triangulaire, on remarque que :

$\left(\|B(Y+Z)\|^2+\|BA(Y+Z)\|^2\right)^{1/2} =$

$\left(|\langle B(Y+Z),e_1\rangle|^2+|\langle B(Y+Z),e_2\rangle|^2+|\langle BA(Y+Z),e_1\rangle|^2+|\langle BA(Y+Z),e_2\rangle|^2\right)^{1/2}$ où e_1 et e_2 forment la base canonique de $\mathbb{C}^2$; et on conclut avec la norme classique sur $\mathbb{C}^4$.

D'autre part, $\varphi(Y)=0 \Rightarrow Y=0$ grâce au **[c]**.

On conclut grâce à l'équivalence des normes.

<u>Deuxième méthode :</u>

L'existence de C_2 découle des deux inégalités suivantes :

$$\|BY\|^2 \le \|B\|^2\|Y\|^2 \quad \text{et} \quad \|BAY\|^2 \le \|BA\|^2\|Y\|^2$$

Pour l'existence de C_1, on procède par l'absurde :

On suppose que pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe $Y_n\in\mathbb{C}^N$ tel que $\frac{1}{n}\|Y_n\|^2 > \|BY_n\|^2+\|BAY_n\|^2$ (i).

On est sûr que Y_n est non nul.

On pose $Z_n=\frac{Y_n}{\|Y_n\|}$. L'inégalité (i) devient : $\frac{1}{n} > \|BZ_n\|^2+\|BAZ_n\|^2$ (j).

La suite (Z_n) est dans la sphère de rayon 1, qui est compacte.

On peut donc en extraire une sous-suite convergente. (vers Z)

En passant à la limite dans (j), on obtient : $0 \ge \|BZ\|^2+\|BAZ\|^2$.

Donc BZ = 0 ; BAZ = 0 et $\|Z\|=1$.

Ceci contredit l'équivalence II**[a]** $\Leftrightarrow$ II**[c]**. (ici, N=2)

$\boxed{2a}$ X_k résout le problème de Cauchy suivant : $\frac{d}{dt}X_k(t)=(ikA-B^*B)X_k(t)$ et $X_k(0)=c_k(\omega_0)$

$\boxed{2b}$ <u>Première méthode :</u> (de vous savez qui.)

$2|\mathrm{Im}\langle BAY,BY\rangle| = 2|\mathrm{Re}\langle iBAY,BY\rangle| \le \|iBAY\|^2+\|BY\|^2 \le C_2\|Y\|^2$

Soit $\varepsilon_0=\frac{1}{C_2}$. Pour tout $k\neq 0$ et tout $\varepsilon<\varepsilon_1$, $C_2\frac{\varepsilon}{2|k|}\le\frac{1}{2}$.

Donc $\frac{\varepsilon}{k}\mathrm{Im}\langle BAY,BY\rangle \in \left[-\frac{1}{2}\|Y\|^2,\frac{1}{2}\|Y\|^2\right]$. On ajoute $\|Y\|^2$.

<u>Deuxième méthode:</u>

Cauchy-Schwarz : $|\langle BAY,BY\rangle| \le \|BAY\|\|BY\| \le \|BA\|\|B\|\|Y\|^2 \le C\|Y\|^2$.

On peut imposer sans soucis C > 0.

On pose $\varepsilon_0=\frac{1}{2C}$. Pour tout $\varepsilon\in]0,\varepsilon_0[$ et pour tout $Y\in\mathbb{C}^N$: $|\varepsilon\langle BAY,BY\rangle| \le \frac{1}{2C}C\|Y\|^2=\frac{\|Y\|^2}{2}$.

On peut toujours diviser par k, prendre la partie imaginaire ; l'inégalité est encore vraie.

Ainsi : $-\frac{\|Y\|^2}{2} \le \frac{\varepsilon}{k}\mathrm{Im}\langle BAY,BY\rangle \le \frac{\|Y\|^2}{2}$.

Il n'y a plus qu'à ajouter $\|Y\|^2$ pour obtenir l'inégalité demandée.

$\boxed{2c}$ Pas de problème pour dériver : X_k est dérivable, le produit scalaire et la partie imaginaire aussi.

$\frac{d}{dt}L_{\varepsilon,k}[X_k(t)] = -2\|BX_k(t)\|^2+\frac{\varepsilon}{k}\mathrm{Im}\left(\left\langle BA\frac{d}{dt}X_k(t),BX_k(t)\right\rangle+\left\langle BAX_k(t),B\frac{d}{dt}X_k(t)\right\rangle\right)$ (Q III3)

On remplace les $\frac{d}{dt}X_k(t)$ par $(ikA-B^*B)X_k(t)$; et voilà.

$\boxed{2d}$

$$\frac{d}{dt}L_{\varepsilon,k}\left[X_k(t)\right]=-2\|BX_k(t)\|^2+\frac{\varepsilon}{k}\mathrm{Im}\left(\left\langle BAikAX_k(t),BX_k(t)\right\rangle\right)-\frac{\varepsilon}{k}\mathrm{Im}\left(\left\langle BAB^*BX_k(t),BX_k(t)\right\rangle\right)$$
$$+\frac{\varepsilon}{k}\mathrm{Im}\left(\left\langle BAX_k(t),ikBAX_k(t)\right\rangle\right)-\frac{\varepsilon}{k}\mathrm{Im}\left(\left\langle BAX_k(t),BB^*BX_k(t)\right\rangle\right)$$
$$=-2\|BX_k(t)\|^2+\alpha+\beta+\gamma+\delta$$

$\alpha=\varepsilon\,\mathrm{Im}\left(i\left\langle BAAX_k,BX_k\right\rangle\right)\le\varepsilon\left|\left\langle BAAX_k,BX_k\right\rangle\right|\le\varepsilon\|BAAX_k\|\bullet\|BX_k\|\le\varepsilon\|\|BAA\|\|\bullet\|X_k\|\bullet\|BX_k\|$.

$|\beta|\le\varepsilon\left|\left\langle BAB^*BX_k,BX_k\right\rangle\right|\qquad(k\neq0)$

Donc $|\beta|\le\varepsilon\|\|BAB^*B\|\|\bullet\|X_k\|\bullet\|BX_k\|$ (Cauchy-Schwarz) Et de deux.

$\gamma=\dfrac{\varepsilon}{k}\mathrm{Im}\left(-ik\left\langle BAX_k,BAX_k\right\rangle\right)=\varepsilon\,\mathrm{Im}\left(-i\|BAX_k\|^2\right)=-\varepsilon\|BAX_k\|^2$. Et de trois.

$|\delta|\le\varepsilon\left|\left\langle BB^*BAX_k,BX_k\right\rangle\right|\qquad(k\neq0)$

Donc $|\delta|\le\varepsilon\|\|BB^*BA\|\|\bullet\|X_k\|\bullet\|BX_k\|$. Et de quatre, je mange des patates.

On en déduit l'inégalité demandée.

$\boxed{2e}$ Soit $\varepsilon_1>0$; plus petit que ε_0, que 1 et que $\dfrac{4C_1}{C_3{}^2+2C_1}$.

Soit $C_4=\dfrac{1}{3}C_1$. $\qquad\varepsilon C_4L_{\varepsilon,k}\left[X_k(t)\right]\le\varepsilon\dfrac{1}{3}C_1\dfrac{3}{2}\|X_k(t)\|^2=\dfrac{\varepsilon}{2}C_1\|X_k(t)\|^2$ (Q 2b)

De plus, $C_1\|X_k\|^2\le\|BX_k(t)\|^2+\|BAX_k(t)\|^2$. (Q1)

Donc $-\|BAX_k(t)\|^2\le\|BX_k(t)\|^2-C_1\|X_k\|^2$

Donc :
$$\frac{d}{dt}L_{\varepsilon,k}\left[X_k(t)\right]+\varepsilon C_4L_{\varepsilon,k}\left[X_k(t)\right]\le-2\|BX_k(t)\|^2-\varepsilon\|BAX_k(t)\|^2+\varepsilon C_3\|X_k(t)\|\|BX_k(t)\|$$
$$+\frac{\varepsilon}{2}\left(C_1\|X_k(t)\|^2\right)$$

Ainsi, $\dfrac{d}{dt}L_{\varepsilon,k}\left[X_k\right]+\varepsilon C_4L_{\varepsilon,k}\left[X_k\right]\le-2\|BX_k\|^2+\left(\varepsilon\|BX_k\|^2-\varepsilon C_1\|X_k\|^2\right)+\varepsilon C_3\|X_k\|\|BX_k\|+\dfrac{\varepsilon}{2}C_1\|X_k\|^2$

$$\frac{d}{dt}L_{\varepsilon,k}\left[X_k\right]+\varepsilon C_4L_{\varepsilon,k}\left[X_k\right]\le(\varepsilon-2)\|BX_k\|^2+\varepsilon C_3\|BX_k\|\|X_k\|-\frac{\varepsilon}{2}C_1\|X_k\|^2.$$

On divise la partie de droite par $\|X_k(t)\|^2$.

On obtient un polynôme en $Z=\dfrac{\|BX_k(t)\|}{\|X_k(t)\|}$ de degré 2, dont le discriminant vaut :

$$\Delta=\varepsilon^2C_3{}^2+(\varepsilon-2)2\varepsilon C_1=\varepsilon^2(C_3{}^2+2C_1)-4\varepsilon C_1=\varepsilon\left(\varepsilon(C_3{}^2+2C_1)-4C_1\right)<0.$$

Donc ce polynôme est du signe de $\varepsilon-2$, c'est à dire négatif. Ouf.

$\boxed{2f}$ Soit $f(t)=L_{\varepsilon,k}\left[X_k(t)\right]-L_{\varepsilon,k}\left[X_k(0)\right]e^{-\varepsilon C_4t}$.

f'$(t)\le0$, donc f est décroissante. Comme f(0) = 0 : $f(t)\le0$ sur $[0,+\infty[$.

$\boxed{3}$ $\dfrac{1}{2}\|X_k(t)\|^2\le L_{\varepsilon,k}\left[X_k(t)\right]\le L_{\varepsilon,k}\left[X_k(0)\right]e^{-\varepsilon C_4t}\le\dfrac{3}{2}\|X_k(0)\|^2e^{-\varepsilon C_4t}=\dfrac{3}{2}\|c_k(\omega_0)\|^2e^{-\varepsilon C_4t}$.

Donc, $\|X_k(t)\|\le\sqrt{3}\|c_k(\omega_0)\|e^{-\varepsilon_0C_4t}$.

$\boxed{4}$ $\omega(t,x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}X_k(t)e^{ikt}$.

$$\|\omega(t,x)\|^2 \le \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left\|X_k(t)e^{ikt}\right\|^2 \le 3\left(\sum \|c_k(\omega_0)^2\|\right)e^{-\varepsilon C_4 t} .$$

On intègre de 0 à 2π ; et on conclut avec Parseval : $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|\omega_0(0,x)\|^2\,dx = \sum_{\mathbb{Z}}\|c_k(\omega_0)\|^2$.