Correction

A. Etude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x\,\mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. $\mathbb{R}^*$ est symétrique par rapport à 0. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

$$f(-x) = (-x)\,\mathrm{sh}\left(-\frac{1}{x}\right) = x\,\mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right) = f(x) \quad \text{car sh est impaire.}$$

Donc $\boxed{f \text{ est paire.}}$

2. **(a)** Au voisinage de 0, $\mathrm{sh}(X) \underset{X\to 0}{\sim} X$.

Limite en $+\infty$: Pour x tendant vers $+\infty$, on pose $X = 1/x$. Ainsi X tend vers 0^+ et

$$x\,\mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\mathrm{sh}(X)}{X} \underset{X\to 0^+}{\sim} 1.$$

Ainsi $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.}$

Limite en $-\infty$: Par parité, $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1.}$

(b) Limite en 0 : Pour x tendant vers 0^+, on pose $X = 1/x$. Ainsi X tend vers $+\infty$ et $x\,\mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\mathrm{sh}(X)}{X} = \frac{e^X - e^{-X}}{2X}$. Or $\lim_{X\to+\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$ par croissances comparées et $\lim_{X\to+\infty} \frac{e^{-X}}{X} = 0$. Donc $\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty.}$

Par parité de f, $\boxed{\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty.}$

3. Sur $\mathbb{R}^*$, la fonction $x \longmapsto \mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable. En effet c'est la composée de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}^*$ et de la fonction sh qui est dérivable sur $\mathbb{R}$. Puis par produit de fonctions dérivables, $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}^*}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = \mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right) + x \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right) = \boxed{\left[\mathrm{th}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right]\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right).}$$

4. Pour $X \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $\varphi(X) = \mathrm{th}(X) - X$. φ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée

$$\forall X > 0, \quad \varphi'(X) = 1 - \mathrm{th}^2(X) - 1 = -\,\mathrm{th}^2 X < 0.$$

Donc φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc pour tout $X \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(X) < \varphi(0)$ soit $\boxed{\mathrm{th}(X) < X.}$

5. Comme la fonction ch est strictement positive, on trouve d'après la question A.4. que f' est strictement négative sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit le tableau de variations suivant (grâce à la parité de f) :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1

6. Pour obtenir le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $X \longmapsto \frac{\mathrm{sh}(X)}{X}$, on effectue le développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction sh :

$$\mathrm{sh}(X) = X + \frac{X^3}{6} + \frac{X^5}{120} + o(X^5).$$

Donc

$$\boxed{\frac{\mathrm{sh}(X)}{X} = 1 + \frac{X^2}{6} + \frac{X^4}{120} + o(X^4).}$$

7. On pose $X = \frac{1}{x}$. Ainsi lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, X tend vers 0. Donc pour X au voisinage de 0, on a d'après la question A.6,

$$f\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{\mathrm{sh}(X)}{X} = 1 + \frac{X^2}{6} + \frac{X^4}{120} + o(X^4),$$

soit pour x au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$,

$$f(x) = 1 + \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{120x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

Il suffit donc de prendre $\boxed{a_0 = 1,\ a_1 = 0,\ a_2 = \frac{1}{6},\ a_3 = 0,\ a_4 = \frac{1}{120}.}$

8. La fonction $x \longmapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de deux fonctions dérivables (fonction f et fonction inverse). De plus, pour $x \in \mathbb{R}^*$ au voisinage de 0

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4),$$

Donc $\lim\limits_{x\to 0} f\left(\frac{1}{x}\right) = 1$, ce qui prouve que f se prolonge par continuité en 0. En notant F ce prolongement, $F(0) = 1$ et F admet donc le développement limité suivant en 0 :

$$F(x) = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4).$$

Ainsi F admet un développement limité à l'ordre 4 en 0, donc aussi un développement limité à l'ordre 1 en 0 ce qui prouve que F est dérivable en 0.

Finalement, F étant aussi dérivable sur $\mathbb{R}^*$, on a prouvé que $\boxed{\text{la fonction } F \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}.}$

B. Tracé d'une courbe paramétrée

9. La fonction x est précisément la fonction f étudiée dans la partie A. Passons à l'étude de la fonction y.

La fonction y est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et pour tout $y \in \mathbb{R}^*$, on a

$$y'(t) = e^{\frac{1}{t}} + t \times \left(-\frac{1}{t^2}\right) e^{\frac{1}{t}} = e^{\frac{1}{t}}\left(1 - \frac{1}{t}\right).$$

Le signe de $y'(t)$ est celui de $1 - \frac{1}{t} = \frac{t-1}{t}$.

Par ailleurs, $\lim\limits_{t\to+\infty} te^{1/t} = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to-\infty} te^{1/t} = -\infty$. Pour obtenir la limite en 0^+ de $y(t)$, on pose $T = 1/t$. Lorsque t tend vers 0^+, T tend vers $+\infty$. Or $te^{1/t} = \dfrac{e^T}{T}$ et $\lim\limits_{T\to+\infty} \dfrac{e^T}{T} = +\infty$ (croissances comparées). Donc $\lim\limits_{t\to 0^+} te^{1/t} = +\infty$.

Et en 0^-, il n'y a pas de forme indéterminée : $\lim\limits_{t\to 0^-} te^{1/t} = 0$.

On obtient finalement les tableaux de variations et de signes suivants :

t	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$\mathrm{sh}(1)$	$\searrow$	1
$y'(t)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0 ‖ $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

10. On a $x(t) \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 1$ et $y(t) \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. De plus, $x(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $y(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

La courbe Γ admet une $\boxed{\text{asymptote verticale d'équation } x = 1.}$ Par ailleurs, d'après le tableau de variations, tous les points M de Γ sont à droite de cette asymptote.

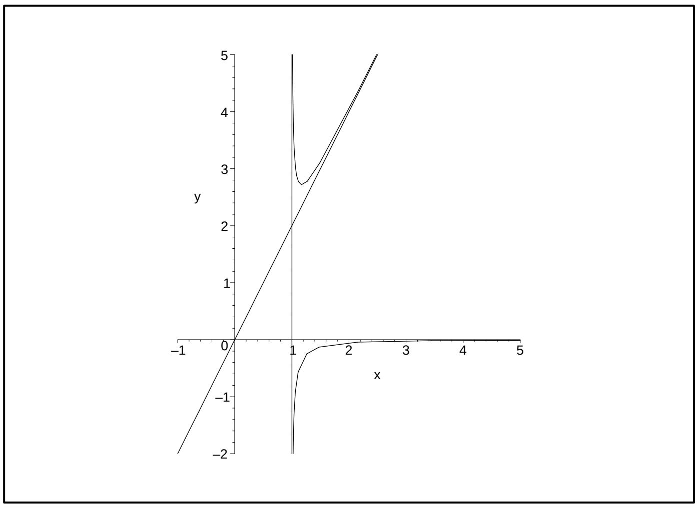
On a $x(t) \underset{t\to 0^-}{\longrightarrow} +\infty$ et $y(t) \underset{t\to 0^-}{\longrightarrow} 0$. La courbe $\boxed{\Gamma \text{ admet une asymptote horizontale d'équation } y = 0.}$ Les points M de Γ correspondant à un paramètre $t < 0$ sont en dessous de cette asymptote horizontale.

On a $x(t) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$ et $y(t) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$. Et $\dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{\exp\left(\frac{1}{t}\right)}{\mathrm{sh}\left(\frac{1}{t}\right)} = \dfrac{2\exp\left(\frac{1}{t}\right)}{\exp\left(\frac{1}{t}\right) - \exp\left(-\frac{1}{t}\right)} \underset{0^+}{\sim} \dfrac{2\exp\left(\frac{1}{t}\right)}{\exp\left(\frac{1}{t}\right)} \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 2$. Enfin,

$$y(t) - 2x(t) = t\exp\left(-\frac{1}{t}\right) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

Γ admet donc la droite d'équation $\boxed{y = 2x \text{ comme asymptote oblique}}$ et comme $y(t) - 2x(t) \geq 0$ pour $t > 0$ car $t\exp\left(-\frac{1}{t}\right)$ pour $t > 0$, la courbe $\boxed{\Gamma \text{ est au dessus de son asymptote oblique}}$ pour les points M de paramètre $t > 0$.

11.



C. Une équation différentielle

12. On introduit l'équation homogène (E_0) associée : $xy' + y = 0$. Sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $x \longmapsto x$ est continue et ne s'annule pas. De plus une primitive de $x \longmapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \longmapsto \ln|x|$. Et sur $\mathbb{R}_+^*$, $|x| = x$. Donc les solutions de (E_0) sont $y(x) = \lambda\exp(-\ln x) = \frac{\lambda}{x}$, où λ est un paramètre réel quelconque.

Pour obtenir une solution particulière de (E), on utilise la méthode de variation de la constante. On considère λ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On note alors pour $x > 0$, $y(x) = \frac{\lambda(x)}{x}$. y est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $y'(x) = \frac{x\lambda'(x) - \lambda(x)}{x^2}$. Ainsi

$$y \text{ est solution de } (E) \iff \forall x > 0,\ \lambda'(x) = \operatorname{ch} x.$$

Prenons par exemple $\lambda(x) = \operatorname{sh} x$ pour tout $x > 0$ soit $y(x) = \frac{\operatorname{sh} x}{x}$ pour tout $x > 0$. Les solutions de (E) sont la somme de la solution particulière que l'on vient d'exhiber et des solutions de l'équation homogène (E_0). Les solutions de (E) sont donc

$$\boxed{x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \frac{\lambda + \operatorname{sh} x}{x} \in \mathbb{R} \quad (\lambda \text{ étant une constante réelle quelconque}).}$$

13. Sur $\mathbb{R}_-^*$, on effectue les mêmes calculs, et on trouve encore que les solutions sont

$$\boxed{x \in \mathbb{R}_-^* \longmapsto \frac{\mu + \operatorname{sh} x}{x} \in \mathbb{R} \quad (\mu \text{ étant une constante réelle quelconque}).}$$

14. On procède par analyse/synthèse.

Analyse : Supposons qu'il existe une fonction y dérivable sur $\mathbb{R}$ solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E). Alors, d'après les questions C.12. et C.13. il existe deux constantes réelles λ et μ telles que

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{\mu + \operatorname{sh} x}{x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{\lambda + \operatorname{sh} x}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Comme y est continue en 0 (car dérivable) les limites de y en 0^+ et en 0^- sont finies et égales, ce qui impose que $\lambda = \mu = 0$. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $y(x) = \frac{\operatorname{sh} x}{x}$. De plus y est continue en 0. Par unicité du prolongement par continuité en 0 de l'application $x \longmapsto \frac{\operatorname{sh} x}{x}$ la fonction y est donc égale à la fonction F, définie dans la question $A.8$.

Synthèse : La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après A.8. De plus, sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$, $F(x) = \frac{\operatorname{sh} x}{x}$ donc F est bien solution de (E) sur ces deux intervalles d'après les questions C.12 et C.13. Enfin, $F(0) = 1$ donc en $x = 0$ on a bien $0F'(0) + F(0) = \operatorname{ch} 0$. Finalement, $\boxed{F \text{ est bien l'unique fonction dérivable sur } \mathbb{R}, \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}.}$

Fin solution