

Probabilités - Partie 2

Exercice 1 :

Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$ telle qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(X = k) = a C_n^k$$

- 1) Que vaut a ?
- 2) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 2 :

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de taille n et de paramètre p ; où $p \in]0, 1[$.

Calculer l'espérance de la variable aléatoire $Y = \frac{1}{X+1}$.

Exercice 3 :

On considère un dé cubique, de faces numérotées de 1 à 6.

On suppose que celui-ci est truqué, de sorte que la probabilité d'obtenir chaque face k est proportionnelle à k .

Soit X la variable aléatoire associée au lancer du dé (c-à-d donnant le numéro affiché) .

- 1) Déterminer la loi de X , puis calculer son espérance .
- 2) Considérons la variable aléatoire $Y = \frac{1}{X}$.
Déterminer la loi de Y et calculer son espérance $E(Y)$.

Exercice 4 :

Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels distincts deux à deux, où $n \in \mathbb{N}^*$.

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles **indépendantes** telles que

$$X(\Omega) = Y(\Omega) = \{a_1, \dots, a_n\}$$
$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(X = a_i) = P(Y = a_i) = p_i$$

- 1) Que vaut la somme $\sum_{i=1}^n p_i$?

- 2) Montrer que

$$P(X \neq Y) = \sum_{i=1}^n p_i(1 - p_i)$$

Exercice 5 :

Soient X une variable aléatoire réelle, et $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ une application strictement croissante.

Montrer que

$$\forall a \succ 0, P(|X| \geq a) \leq \frac{E(g(|X|))}{g(a)}$$

Indice : Vous pouvez utiliser l'inégalité de **Markov**.

Exercice 6 :

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $\mathbf{n}, \mathbf{p}$.

Montrer que

$$\forall \lambda, \varepsilon \succ 0, P(X - np \geq n\varepsilon) \leq E(\exp(\lambda(X - np - n\varepsilon)))$$

Exercice 7 :

Soient X et Y deux variables aléatoires **indépendantes**, suivant une loi binomiale de paramètres $\mathbf{n}, \mathbf{p}$ et $\mathbf{m}, \mathbf{p}$ respectivement.

Considérons la variable aléatoire somme $S = X + Y$.

1) Montrer que

$$\forall l \in \llbracket 0, m+n \rrbracket, \sum_{k=0}^l \binom{n}{k} \binom{m}{l-k} = \binom{m+n}{l}$$

Indice : Vous pouvez considérer le coefficient en X^l dans l'égalité polynomiale $(1+X)^{m+n} = (1+X)^m(1+X)^n$.

2) En déduire que la variable aléatoire S suit une loi binomiale de paramètres $\mathbf{m+n}$ et $\mathbf{p}$.

Exercice 8 :

Soient (Ω, T, P) un espace probabilisé **fini**, et X une variable aléatoire réelle positive.

Noter que $X(\Omega)$ est bien **fini**.

Montrer que

$$E(X) = 0 \Leftrightarrow (X = 0 \text{ presque sûrement})$$

Rappel : $(X = 0 \text{ presque sûrement})$ veut dire que $P(X = 0) = 1$, ou encore $P(X \neq 0) = 0$.

CORRECTION

Exercice 1 :

Soit X une variable aléatoire réelle à valeur dans $\llbracket 0, n \rrbracket$ telle qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(X = k) = a C_n^k$$

1) Que vaut a ?

$$\text{On a } X(\Omega) = \{0, \dots, n\}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^n P(X=k) = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^n a C_n^k = 1$$

$$\Rightarrow a \cdot \underbrace{\left(\sum_{k=0}^n C_n^k 1^k \cdot 1^{n-k} \right)}_{= (1+1)^n = 2^n} = 1$$

$$\Rightarrow a \cdot 2^n = 1$$

Donc

$$a = \frac{1}{2^n}$$



Soit X une variable aléatoire réelle à valeur dans $\llbracket 0, n \rrbracket$ telle qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(X = k) = a C_n^k$$

1) Que vaut a ?

2) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

2) i) $E(X) = ?$

$$E(X) = \sum_{k=0}^n k P(X=k)$$

$$= \sum_{k=0}^n k \cdot \frac{1}{2^n} \cdot C_n^k$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n k C_n^k$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^n k C_n^k$$

Et on a $k C_n^k = n C_{n-1}^{k-1}$, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\text{Donc } E(X) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^n n C_{n-1}^{k-1}$$

$$= \frac{n}{2^n} \cdot \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1}$$

$$= \frac{n}{2^n} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k$$

$$= \frac{n}{2^n} \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{C_{n-1}^k \cdot 1^k \cdot 1^{n-1-k}}_{= (1+1)^{n-1} = 2^{n-1}}$$

$$= \frac{n}{2^n} \times 2^{n-1}$$

$$E(X) = \frac{n}{2} \quad \square$$

Piste 2

$$D_n a : \begin{cases} X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket \\ \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(X=k) = \frac{1}{2^n} C_n^k = C_n^k \times \left(\frac{1}{2}\right)^k \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \end{cases}$$

d'où $X \sim B(n, \frac{1}{2})$; X suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$.

Par suite :

$$E(X) = n \times \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$$

$$V(X) = n \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{n}{4}$$

$\square$

Si $X \sim B(n, p)$ alors :
 $E(X) = np$; $V(X) = np(1-p)$

Fin Exercice 1

Exercice 2 :

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de taille n et de paramètre p ; où $p \in]0, 1[$.

Calculer l'espérance de la variable $Y = \frac{1}{X+1}$.

CORRECTION

$$E(Y) = E\left(\frac{1}{X+1}\right) \quad \text{car } X(\Omega) = \{0, \dots, n\}$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} P(X=k) \quad (\text{Formule de transfert})$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{k+1} p^k (1-p)^{n-k} \quad (\text{car } X \sim B(n, p))$$

$$\text{Or on a } \frac{C_n^k}{k+1} = \frac{n!}{(k+1)k!(n-k)!}$$

$$= \frac{n! \times (n+1)}{(k+1)!(n-k)!(n+1)}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))! \cdot (n+1)}$$

$$\frac{C_n^k}{k+1} = \frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1}$$

$$\Rightarrow E(Y) = \sum_{k=0}^n \frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n C_{n+1}^{k+1} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} C_{n+1}^k p^{k-1} (1-p)^{n-(k-1)} \begin{pmatrix} \text{décalage} \\ \text{d'indice} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=1}^{n+1} C_{n+1}^k p^k (1-p)^{n+1-k} \right) \cdot p^{-1}$$

↳ forme du binôme de Newton

$$= \frac{1}{p(n+1)} \left(\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k p^k (1-p)^{n+1-k} - (1-p)^{n+1} \right)$$

$= (p + (1-p))^{n+1} = 1$

$$E(Y) = \frac{1 - (1-p)^{n+1}}{p(n+1)}$$



Fin Exercice 2

Exercice 3 :

On considère un dé cubique, de faces numérotées de 1 à 6.

On suppose que celui-ci est truqué, de sorte que la probabilité d'obtenir chaque face k est proportionnelle à k .

Soit X la variable aléatoire associée au lancer du dé (c-à-d donnant le numéro affiché) .

1) Déterminer la loi de X , puis calculer son espérance .

1) i) Loi de X ?

$$\text{On a } X(\Omega) = \{1, \dots, 6\}.$$

Notons $C \in \mathbb{R}$ tel que : $(\forall k \in [1, 6], P(X=k) = C \cdot k)$

$$\text{On a } \sum_{k=1}^6 P(X=k) = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^6 C \cdot k = 1$$

$$\Rightarrow C \cdot \sum_{k=1}^6 k = 1$$

$$\rightarrow = \frac{6 \times (6+1)}{2} = 21$$

D'où

$$C = \frac{1}{21}$$

Enfin la loi de X est :

$$X(\Omega) = [1, 6]$$

$$\forall k \in [1, 6], P(X=k) = \frac{k}{21}$$



1) ii) $E(X) = ?$

$$E(X) = \sum_{k=1}^6 k P(X=k)$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{= \frac{k}{21}}$

$$= \sum_{k=1}^6 \frac{k^2}{21}$$

$$= \frac{1}{21} \sum_{k=1}^6 k^2$$

$$E(X) = \frac{91}{2}$$



$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

On considère un dé cubique, de faces numérotées de 1 à 6.

On suppose que celui-ci est truqué, de sorte que la probabilité d'obtenir chaque face k est proportionnelle à k .

Soit X la variable aléatoire associée au lancer du dé (c-à-d donnant le numéro affiché) .

1) Déterminer la loi de X , puis calculer son espérance .

2) Considérons la variable aléatoire $Y = \frac{1}{X}$.

Déterminer la loi de Y et calculer son espérance $E(Y)$.

2) i) Loi de Y ?

$$\text{On a } Y = \frac{1}{X} \text{ et } \begin{cases} X(\Omega) = \llbracket 1, 6 \rrbracket \\ \forall k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket, P(X=k) = \frac{k}{21} \end{cases}$$

$$\Rightarrow Y(\Omega) = \left\{ \frac{1}{k} / k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket \right\}$$

Et $\forall k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$, on a :

$$P\left(Y = \frac{1}{k}\right) = P\left(\frac{1}{X} = \frac{1}{k}\right)$$

$$= P(X=k)$$

$$P\left(Y = \frac{1}{k}\right) = \frac{k}{21}$$

Ainsi la loi de Y est :

$$Y(\Omega) = \left\{ \frac{1}{k} / k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket \right\}$$

$$\forall k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket, P\left(Y = \frac{1}{k}\right) = \frac{k}{21}$$

2) ii) $E(Y) = ?$

$$E(Y) = \sum_{k=1}^6 \frac{1}{k} \underbrace{P(Y = \frac{1}{k})}_{= \frac{k}{21}} \quad (\text{via la loi de } Y)$$

$$= \sum_{k=1}^6 \frac{1}{21}$$

$$= \frac{1}{21} \times 6$$

$$E(Y) = \frac{2}{7}$$

On peut faire via la formule de transfert:

$$E(Y) = E\left(\frac{1}{X}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^6 \frac{1}{k} \underbrace{P(X=k)}_{= \frac{k}{21}}$$

Formule de
transfert

$$= \sum_{k=1}^6 \frac{1}{21} = \frac{2}{7}$$

Fin Exercice 3

Exercice 4 :

Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels distincts deux à deux, où $n \in \mathbb{N}^*$.

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles **indépendantes** telles que

$$X(\Omega) = Y(\Omega) = \{a_1, \dots, a_n\}$$

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(X = a_i) = P(Y = a_i) = p_i$$

1) Que vaut la somme $\sum_{i=1}^n p_i$?

$$X(\Omega) = \{a_1, \dots, a_n\}$$

$$\text{Alors } \sum_{i=1}^n \underbrace{P(X = a_i)}_{\rightarrow p_i} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^n p_i = 1} \quad \square$$

Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels distincts deux à deux, où $n \in \mathbb{N}^*$.

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles **indépendantes** telles que

$$X(\Omega) = Y(\Omega) = \{a_1, \dots, a_n\}$$

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(X = a_i) = P(Y = a_i) = p_i$$

1) Que vaut la somme $\sum_{i=1}^n p_i$?

2) Montrer que

$$P(X \neq Y) = \sum_{i=1}^n p_i(1 - p_i)$$

On a : $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{a_1, \dots, a_n\}$ alors :

$$(X \neq Y) = \left(\underset{\substack{\downarrow \\ \text{et}}}{(X=a_1) \cap (Y \neq a_1)} \right) \cup \left(\underset{\substack{\downarrow \\ \text{ou}}}{(X=a_2) \cap (Y \neq a_2)} \right) \cup \dots \cup \left(\underset{\substack{\downarrow \\ \text{et}}}{(X=a_n) \cap (Y \neq a_n)} \right)$$

$$\Rightarrow (X \neq Y) = \bigcup_{i=1}^n (X=a_i, Y \neq a_i)$$

$$\Rightarrow P(X \neq Y) = \sum_{i=1}^n P(X=a_i, Y \neq a_i) \left(\begin{array}{l} \text{Car les } (X=a_i, Y \neq a_i) \\ \text{sont deux à deux} \\ \text{incompatibles} \end{array} \right)$$

$$\rightarrow = P(X=a_i) \cdot P(Y \neq a_i)$$

Car X et Y sont indépendantes

$$\Rightarrow P(X \neq Y) = \sum_{i=1}^n \underbrace{P(X=a_i)}_{=p_i} \cdot \underbrace{P(Y \neq a_i)}_{=1-p_i}$$

Ainsi :

$$P(X \neq Y) = \sum_{i=1}^n p_i (1 - p_i)$$



Fin Exercice 4

Exercice 5 :

Soient X une variable aléatoire réelle, et $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ une application strictement croissante.

Montrer que

$$\forall a > 0, P(|X| \geq a) \leq \frac{E(g(|X|))}{g(a)}$$

Indice : Vous pouvez utiliser l'inégalité de **Markov**.

Soit $a > 0$.

$$P(|X| \geq a) \leq ?$$

On veut faire apparaître $E(g(|X|))$.

On a $(|X| \geq a) \subset (g(|X|) \geq g(a))$ car $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ croissante.

$$\Rightarrow P(|X| \geq a) \leq P(g(|X|) \geq g(a)) \leq \frac{E(g(|X|))}{g(a)} \quad ; \quad \left(\begin{array}{l} \text{d'après l'inégalité de Markov} \\ \text{puisque } g(|X|) \geq 0. \end{array} \right)$$

Justifions que $g(a) > 0$:

On a $\begin{cases} a > 0 \\ g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ strictement croissante} \end{cases}$

$$\Rightarrow g(a) > g(0)$$

On $g(0) \geq 0$ (car $\in \mathbb{R}^+$; arrivée), alors $g(a) > 0$

Soit X une var positive.

Soit $a \geq 0$. On a :

$$E(X) \geq a P(X \geq a)$$

Fin Exercice 5

Exercice 6 :

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n, p .
Montrer que

$$\forall \lambda, \varepsilon > 0, P(X - np \geq n\varepsilon) \leq E(\exp(\lambda(X - np - n\varepsilon)))$$

On a $X \sim B(n, p)$.

Soient $\lambda > 0$ et $\varepsilon > 0$.

Montrons que $P(X - np \geq n\varepsilon) \leq E(e^{\lambda(X - np - n\varepsilon)})$.

On a :

$$\begin{aligned} (X - np \geq n\varepsilon) &= (X - np - n\varepsilon \geq 0) \\ &= (\lambda(X - np - n\varepsilon) \geq 0) \quad (\text{car } \lambda > 0) \\ &= (e^{\lambda(X - np - n\varepsilon)} \geq 1) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } P(X - np \geq n\varepsilon) = P(e^{\lambda(X - np - n\varepsilon)} \geq 1)$$

Soit X une var positive.

Soit $a > 0$. On a :

$$E(X) \geq a P(X \geq a)$$

inégalité de Markov

$$\leq \frac{1}{1} E(e^{\lambda(X - np - n\varepsilon)})$$

→ d'après l'inégalité de Markov appliquée à la variable aléatoire

$$e^{\lambda(X - np - n\varepsilon)} \quad \text{et avec } a = 1$$

Fin Exercice 6

Exercice 7 :

Soient X et Y deux variables aléatoires **indépendantes**, suivant une loi binomiale de paramètres n, p et m, p respectivement.

Considérons la variable aléatoire somme $S = X + Y$.

1) Montrer que

$$\forall l \in \llbracket 0, m+n \rrbracket, \sum_{k=0}^l \binom{n}{k} \binom{m}{l-k} = \binom{m+n}{l}$$

Indice : Vous pouvez considérer le coefficient en X^l dans l'égalité polynomiale $(1+X)^{m+n} = (1+X)^m(1+X)^n$.

Soit $l \in \llbracket 0, m+n \rrbracket$. M. que $\sum_{k=0}^l \binom{n}{k} \binom{m}{l-k} = \binom{m+n}{l}$

On a $(1+X)^{m+n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{m+n}{k} X^k$: binôme de Newton (et $\forall k > m+n, \binom{m+n}{k} = 0$)

D'où le coefficient en X^l dans $(1+X)^{m+n}$ est $\binom{m+n}{l}$.

D'autre part, on a :

$$(1+X)^m \cdot (1+X)^n = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \binom{m}{i} X^i \right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \binom{n}{i} X^i \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} C_i X^i, \text{ où } C_i = \sum_{k=0}^i \binom{n}{k} \binom{m}{i-k}$$

Produit de

deux polynômes

$$\Rightarrow (1+X)^{m+n} = \sum_{i=0}^{+\infty} C_i X^i, \text{ où } C_i = \sum_{k=0}^i \binom{n}{k} \binom{m}{i-k}$$

Donc le coefficient de X^l dans $(1+x)^{m+n}$ est $C_l = \sum_{k=0}^l \binom{n}{k} \binom{m}{l-k}$

Donc fin :

$$\binom{m+n}{l} = \sum_{k=0}^l \binom{n}{k} \binom{m}{l-k}$$



Soient X et Y deux variables aléatoires **indépendantes**, suivant une loi binomiale de paramètres **n, p** et **m, p** respectivement.

Considérons la variable aléatoire somme $S = X + Y$.

1) Montrer que

$$\forall l \in \llbracket 0, m+n \rrbracket, \sum_{k=0}^l \binom{n}{k} \binom{m}{l-k} = \binom{m+n}{l}$$

Indice : Vous pouvez considérer le coefficient en X^l dans l'égalité polynomiale $(1+X)^{m+n} = (1+X)^m(1+X)^n$.

2) En déduire que la variable aléatoire S suit une loi binomiale de paramètres **$m+n$** et **p** .

Il s'agit de montrer que :

$$S(\Omega) = \llbracket 0, m+n \rrbracket$$
$$\forall l \in \llbracket 0, m+n \rrbracket, P(S=l) = \binom{m+n}{l} p^l (1-p)^{m+n-l}$$

$$\text{On a } X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket \text{ et } Y(\Omega) = \llbracket 0, m \rrbracket$$

$$\text{Alors } S(\Omega) = \llbracket 0, m+n \rrbracket.$$

Soit maintenant $l \in \llbracket 0, m+n \rrbracket$.

$$\text{M. que } P(S=l) = \binom{m+n}{l} p^l (1-p)^{m+n-l}$$

On a :

$$P(S=l) = P(X+Y=l)$$

$$P(S=l) = \sum_{k=0}^n P(X+Y=l, X=k) \quad \left(\begin{array}{l} \text{car } (X=k)_{0 \leq k \leq n} \text{ est un} \\ \text{système complet d'événement} \end{array} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^n P(k+Y=l, X=k)$$

$$= \sum_{k=0}^n P(Y=l-k, X=k)$$

$$= \sum_{k=0}^n \underbrace{P(X=k)}_{= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \text{ car } X \sim B(n, p)} \cdot \underbrace{P(Y=l-k)}_{= \binom{m}{l-k} p^{l-k} (1-p)^{m-(l-k)}, \text{ car } Y \sim B(m, p)} \quad \left(\begin{array}{l} \text{car } X \text{ et } Y \\ \text{sont indépendantes} \end{array} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{m}{l-k} p^k p^{l-k} \cdot (1-p)^{n-k} (1-p)^{m-(l-k)}$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{m}{l-k} p^l (1-p)^{m+n-l}$$

?

$$P(S=l) = \binom{m+n}{l} p^l (1-p)^{m+n-l}$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\overset{n}{\rightarrow} l} \binom{n}{k} \binom{m}{l-k} \right) \times p^l (1-p)^{m+n-l}$$

On voudrait l à la place de n .

Car $\sum_{k=0}^l \binom{n}{k} \binom{m}{l-k} = \binom{m+n}{l}$

$$= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n}{k} \binom{m}{l-k} \right) \times p^l (1-p)^{m+n-l} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Car} \\ \forall k > n, \binom{n}{k} = 0 \end{array} \right)$$

$$P(S=l) = \underbrace{\left(\sum_{k=0}^l \binom{n}{k} \binom{m}{l-k} \right)}_{= \binom{m+n}{l}, \text{ d'après 1}^\circ} \times p^l (1-p)^{m+n-l} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Car} \\ \forall k > l, \binom{m}{l-k} = 0 \\ \text{puisque } l-k < 0 \end{array} \right)$$

Enfin:

$$P(S=l) = \binom{m+n}{l} p^l (1-p)^{m+n-l}$$



Fin Exercice 7

Exercice 8 :

Soient $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé fini, et X une variable aléatoire réelle positive.

Noter que $X(\Omega)$ est bien fini.

Montrer que

$$E(X) = 0 \Leftrightarrow (X = 0 \text{ presque sûrement})$$

Rappel : $(X = 0 \text{ presque sûrement})$ veut dire que $P(X = 0) = 1$, ou encore $P(X \neq 0) = 0$.

On a :

$$E(X) = 0 \Leftrightarrow \sum_{x \in X(\Omega)} \underbrace{x}_{\geq 0} \underbrace{P(X=x)}_{\geq 0} = 0$$

$\nearrow \geq 0, \text{ car } x \geq 0$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in X(\Omega), x P(X=x) = 0) \quad \left(\begin{array}{l} \text{Somme nulle de} \\ \text{nombres positifs} \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in X(\Omega) \setminus \{0\}, P(X=x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\substack{x \neq 0 \\ x \in X(\Omega)}} P(X=x) = 0$$

$= P(X \neq 0)$

$$\Leftrightarrow P(X \neq 0) = 0$$

$$\Leftrightarrow (X=0 \text{ presque sûrement})$$

Fin Exercice 8