CONCOURS MINES-PONTS 2022

CORRIGÉ MATHEMATIQUES I - MP

m.laamoum@gmail.com

Formule asymptotique de Hardy et Ramanujan

A. Fonctions L et P

1 $\triangleright$ La série entière $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$ est de rayon de convergence 1 (règle de D'Alembert) donc elle converge sur D.

Si $z \in]-1,1[$ alors $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} = -\ln(1-z)$.

2 $\triangleright$ Soit $z \in D$ et $t \in [0,1]$, $|tz| < 1$ donc $L(tz) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} t^n$, la série entière réelle $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{z^n}{n} x^n$est de rayon de convergence strictement supérieur à 1 donc elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} x^n\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} z^n x^{n-1} = \frac{z}{1-xz}$$

donc

$$\frac{d}{dt} L(tz) = \frac{z}{1-tz}$$

Soit $g : t \mapsto (1-tz)e^{L(tz)}$, elle est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et

$$g'(t) = -ze^{L(tz)} + (1-tz)e^{L(tz)} \frac{d}{dt} L(tz) = 0$$

donc g est constante sur $[0,1]$, comme $g(0) = 1$ alors $g(t) = 1$ et

$$\exp(L(z)) = \frac{1}{1-z}.$$

3 $\triangleright$ Soit z dans D on a

$$\begin{aligned} |L(z)| &= \left|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}\right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|z|^n}{n} = -\ln(1-|z|) \end{aligned}$$

Par suite $|L(z^n)| \leq -\ln(1-|z|^n)$, on a $-\ln(1-|z|^n) \underset{n\to+\infty}{\sim} |z|^n$ donc la série $-\ln(1-|z|^n)$ converge , on en déduit la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 1} L(z^n)$.

B. Développement de P en série entière

4 $\triangleright$ Soit $n \in \mathbb{N}$ et $N \in \mathbb{N}^*$. On a $P_{n,N} \subset [1,n]^N$ donc $P_{n,N}$ est fini .
Si $(a_1,\ldots,a_N) \in P_{n,N}$ alors $(a_1,\ldots,a_N,0) \in P_{n,N+1}$, donc $Card\ (P_{n,N}) \leq Card\ (P_{n,N+1})$ et la suite $(p_{n,N})_{N\geq 1}$ est croissante.
Si $n = 0$ alors $p_{n,N} = 1\ \forall N \in \mathbb{N}^*$.

Si $n \geq 1$ alors pour tout $N > n$ et $(a_1,\ldots,a_N) \in \mathbb{N}^N$ telle que $\sum\limits_{k=1}^{N} ka_k = n$, alors $a_N = \ldots = a_{n+1} = 0$, ainsi $p_{n,N} = p_{n,n}$.

Exemple : les partition de 5 :

$$
\begin{aligned}
&5\\
&4+1\\
&3+2\\
&3+1+1\\
&2+2+1\\
&2+1+1+1\\
&1+1+1+1+1
\end{aligned}
$$

5 $\triangleright$ Si $N=1$ alors $p_{n,N}=1$ et pour tout $z\in D$, $\prod\limits_{k=1}^{N}\frac{1}{1-z^k}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}z^n=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}p_{n,N}z^n$.

Soit $N\in\mathbb{N}^*$ et $z\in D$, supposons que $\prod\limits_{k=1}^{N}\frac{1}{1-z^k}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}p_{n,N}z^n$. Ecrivons

$$\frac{1}{1-z^{N+1}}=\sum_{k=0}^{+\infty}z^{k(N+1)}=\sum_{n=0}^{+\infty}\varepsilon_{N+1}(n)z^n \text{ avec } \varepsilon_{N+1}(n)=\begin{cases}1 & \text{si } N+1|n\\ 0 & \text{si non}\end{cases}$$

Le produit de Cauchy des séries entières donne

$$\prod_{k=1}^{N+1}\frac{1}{1-z^k}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\varepsilon_{N+1}(k)p_{n-k,N}\right)z^n$$

de plus $p_{n-k,N}=\sum\limits_{\substack{(a_1,\dots,a_N)\in\mathbb{N}^N\\ a_1+\dots+Na_N=n}}1$ donc

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\varepsilon_{N+1}(k)p_{n-k,N} &= \sum_{\substack{k=0\\ N+1|k}}^{n}\ \sum_{\substack{(a_1,\dots,a_N)\in\mathbb{N}^N\\ a_1+\dots+Na_N=n-k}}1\\
&= \sum_{\substack{(a_1,\dots,a_N,k)\in\mathbb{N}^{N+1}\\ a_1+\dots+Na_N+k=n\\ N+1|k}}1 \quad (\text{ posons } k=a_{N+1}(N+1)\ )\\
&= \sum_{\substack{(a_1,\dots,a_N,a_{N+1})\in\mathbb{N}^{N+1}\\ a_1+\dots+Na_N+a_{N+1}(N+1)=n}}1\\
&= p_{n,N+1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty}p_{n,N}z^n &= \sum_{n=0}^{+\infty}Card\left(P_{n,N}\right)z^n\\
&= \sum_{\substack{(a_1,\dots,a_N)\in\mathbb{N}^N\\ a_1+\dots+Na_N=n}}^{+\infty}z^n
\end{aligned}
$$

d'où

$$\prod_{k=1}^{N+1}\frac{1}{1-z^k}=\sum_{n=0}^{+\infty}p_{n,N+1}z^n$$

. Ainsi on la relation pour tout N.

6 $\triangleright$ Soit $z\in D$. Fixons $N\in\mathbb{N}$ la série $\sum\left(p_{n,N+1}-p_{n,N}\right)|z|^n$ converge de somme

$$\sigma_N=\prod_{k=1}^{N+1}\frac{1}{1-|z|^k}-\prod_{k=1}^{N}\frac{1}{1-|z|^k}=|z|^{N+1}\prod_{k=1}^{N+1}\frac{1}{1-|z|^k}$$

La suite $\left(\prod\limits_{k=1}^{N}\frac{1}{1-|z|^k}\right)_{N\in\mathbb{N}}$ est croissante de limite $P(|z|)$ donc

$$\sigma_N\leq P(|z|)\,|z|^{N+1}$$

et la série $\sum \sigma_N$ converge d'où la sommabilité de la famille $\left((p_{n,N+1}-p_{n,N})\, z^n\right)_{(n,N)\in\mathbb{N}^2}$.
Ce qui donne

$$\sum_{N=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}(p_{n,N+1}-p_{n,N})\, z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{N=0}^{+\infty}(p_{n,N+1}-p_{n,N})\ \ z^n$$

donc $\sum\limits_N (p_{n,N+1}-p_{n,N})$ converge pour tout n et

$$\sum_{N=0}^{+\infty}(p_{n,N+1}-p_{n,N}) = \lim_{A\to+\infty}\sum_{N=0}^{A}(p_{n,N+1}-p_{n,N}) = p_{n,A+1}-p_{n,0} = p_n$$

car $p_{n,N+1}-p_{n,N}=0$ si $n\leq N$, ce qui prouve la convergenve de $\sum p_n\ z^n$ sur D, on a même la convergence absolue.
D'autre part on a

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{N}\frac{1}{1-z^k} &= \sum_{n=0}^{N} p_{n,N}z^n + \sum_{n=N+1}^{+\infty} p_{n,N}z^n \\ &= \sum_{n=0}^{N} p_n z^n + \sum_{n=N+1}^{+\infty} p_{n,N}z^n\end{aligned}$$

et

$$\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} p_{n,N}z^n\right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} p_{n,N}\,|z|^n \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} p_n\,|z|^n \quad (\text{ car } p_{n,N}\leq p_n)$$

donc $\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} p_{n,N}z^n \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, comme $\prod\limits_{k=1}^{N}\frac{1}{1-z^k} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} P(z)$ alors $\sum\limits_{n=0}^{N} p_n z^n \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} P(z)$ ainsi

$$P(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n \ \forall z\in D.$$

La série $\sum\limits_n p_n x^n$ converge pour tout x dans $]-1,1[$ donc sont rayon de convergence R est plus grand que 1, de plus $P(x) \underset{x\to 1^-}{\to} +\infty$ donc forcement $R\leq 1$, d'où $R=1$.
7 $\triangleright$ La série $\sum p_n e^{-nt+in\theta}$ converge normalement pout $\theta\in[-\pi,\pi]$, le théorème d'intégration des séries de fonctions donne pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout réel $t>0$,

$$p_n = \frac{e^{nt}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta}P\left(e^{-t+i\theta}\right)d\theta$$

et

$$p_n = \frac{e^{nt}P\left(e^{-t}\right)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta}\frac{P\left(e^{-t+i\theta}\right)}{P\left(e^{-t}\right)}d\theta \qquad (1)$$

C. Contrôle de P

8 $\triangleright$ Soit $x\in[0,1[$ et $\theta\in\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right| &= \left|\exp(L(xe^{i\theta}))\right| \\ &= \left|\exp(xe^{i\theta}+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n e^{in\theta}}{n})\right| \\ &\leq \exp(x\cos\theta+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n}) \\ &\leq \exp(x\cos\theta - x - \ln(1-x))\end{aligned}$$

d'où

$$\left|\frac{1-x}{1-xe^{i\theta}}\right| \leq \exp(-(1-\cos\theta)x)$$

Soit $x \in [0,1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\frac{P\left(xe^{i\theta}\right)}{P(x)}\right| &= \lim_{N\to+\infty} \prod_{k=1}^{N} \frac{1-x^k}{1-x^k e^{ik\theta}} \\
&\leq \lim_{N\to+\infty} \prod_{k=1}^{N} \exp(-(1-\cos(k\theta))x^k) \\
&\leq \exp\left(-\sum_{k=1}^{+\infty} x^k + \sum_{k=1}^{+\infty} \cos(k\theta)\, x^k\right) \\
&\leq \exp\left(-\frac{1}{1-x} + \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right)\right)
\end{aligned}$$

9 $\triangleright$ Soit $x \in [\frac{1}{2}, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$, écrivons

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} - \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right) &= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{x(1-e^{i\theta})\left(1-xe^{-i\theta}\right)}{(1-x)\left|1-xe^{i\theta}\right|}\right) \\
&= \frac{x(1+x)(1-\cos\theta)}{(1-x)\left|1-xe^{i\theta}\right|} \\
&\geq \frac{x(1-\cos\theta)}{(1-x)\left|1-xe^{i\theta}\right|}
\end{aligned}$$

de plus $\left|1-xe^{i\theta}\right| = \left((1-x)^2 + 2x(1-\cos\theta)\right)$.
Nous avons

$$\left|\frac{P\left(xe^{i\theta}\right)}{P(x)}\right| \leq \exp\left(-\frac{1}{1-x} + \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right)\right)$$

donc

$$\left|\frac{P\left(xe^{i\theta}\right)}{P(x)}\right| \leq \exp\left(-\frac{x(1-\cos\theta)}{(1-x)\left((1-x)^2+2x(1-\cos\theta)\right)}\right)$$

si $(1-x)^2 \geq x(1-\cos\theta)$ alors

$$\frac{x(1-\cos\theta)}{(1-x)\left((1-x)^2+2x(1-\cos\theta)\right)} \geq \frac{x(1-\cos\theta)}{3(1-x)^3} \geq \frac{1-\cos\theta}{6(1-x)^3}$$

et

$$\left|\frac{P\left(xe^{i\theta}\right)}{P(x)}\right| \leq \exp\left(-\frac{1-\cos\theta}{6(1-x)^3}\right)$$

si $(1-x)^2 \leq x(1-\cos\theta)$ alors

$$\frac{x(1-\cos\theta)}{(1-x)\left((1-x)^2+2x(1-\cos\theta)\right)} \geq \frac{1}{3(1-x)}$$

et

$$\left|\frac{P\left(xe^{i\theta}\right)}{P(x)}\right| \leq \exp\left(-\frac{1}{3(1-x)}\right)$$

D. Intermède : quelques estimations de sommes

Soit $\alpha > 0$. et un entier $n \geq 1$.
10 $\triangleright$ $\varphi_{n,\alpha}(x) \underset{x\to 0^+}{\to} 1$ et $\varphi_{n,\alpha}(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(\frac{1}{x^2})$ donc $\varphi_{n,\alpha}$ est intégrables sur $]0,+\infty[$.
On a

$$\varphi'_{n,\alpha}(x) = \frac{nx^{n-1}}{\left(1-e^{-x}\right)^n} e^{-\alpha x} - \alpha \frac{x^n}{\left(1-e^{-x}\right)^n} e^{-\alpha x} - \frac{nxe^{-x}}{\left(1-e^{-x}\right)^{n+1}} e^{-\alpha x}$$

donc $\varphi'_{n,\alpha}(x) \underset{x\to+\infty}{=} O(x^n e^{-\alpha x})$ et $\varphi'_{n,\alpha}(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{n}{2} - \alpha$ donc $\varphi_{n,\alpha}$ est intégrables sur $]0,+\infty[$.

11 $\triangleright$ Posons $f_k(t) = \frac{k^n e^{-kt\alpha}}{(1-e^{-kt})^n}$. On a $f_k(t) \underset{k\to+\infty}{=} o(\frac{1}{k^2})$ donc $\sum f_k$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, d'où l'existence de $S_{n,a}(t)$ et $S_{n,a}(t)$ est positive car les f_k le sont.
Soit pour tout $t>0$, écrivons

$$\int_0^{+\infty} \varphi_{n,\alpha}(x)dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{kt}^{(k+1)t} \varphi_{n,\alpha}(x)dx$$

Une intégration par parties donne

$$\begin{aligned}\int_{kt}^{(k+1)t} \varphi_{n,\alpha}(x)dx &= \varphi_{n,\alpha}((k+1)t) - \int_{kt}^{(k+1)t} (x-kt)\varphi'_{n,\alpha}(x)dx \qquad (*)\\ &= t^n \frac{(k+1)^n e^{-\alpha(k+1)t}}{\left(1-e^{-(k+1)t}\right)^n} - \int_{kt}^{(k+1)t} (x-kt)\varphi'_{n,\alpha}(x)dx\end{aligned}$$

toutes les sommes sont convergentes , d'où

$$\int_0^{+\infty} \varphi_{n,\alpha}(x)dx = t^{n+1}S_{n,\alpha}(t) - \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{kt}^{(k+1)t} (x-kt)\varphi'_{n,\alpha}(x)dx.$$

On a

$$\left|\int_{kt}^{(k+1)t} (x-kt)\varphi'_{n,\alpha}(x)dx\right| \leq t\int_{kt}^{(k+1)t} \left|\varphi'_{n,\alpha}(x)\right| dx$$

La fonction $\varphi'_{n,\alpha}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc

$$\left|\sum_{k=0}^{+\infty} \int_{kt}^{(k+1)t} (x-kt)\varphi'_{n,\alpha}(x)dx\right| \leq t\int_0^{+\infty} \left|\varphi'_{n,\alpha}(x)\right| dx$$

ce qui donne

$$S_{n,\alpha}(t) = \frac{1}{t^{n+1}} \int_0^{+\infty} \frac{x^n e^{-\alpha x}}{(1-e^{-x})^n}\, dx + O\left(\frac{1}{t^n}\right) \qquad \text{quand } t\to 0^+.$$

12 $\triangleright$ La fonction $f: x \mapsto \dfrac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et $f(x) = xe^{-(k+1)x}$, le théorème d'interversion de $\sum$ et $\int$ donne le résultat.

E. Contrôle des fonctions caractéristiques

13 $\triangleright$ On a $\Phi_X(\theta) := \mathbb{E}(\cos(\theta X)) + i\mathbb{E}(\sin(\theta X))$ donc

$$|\Phi_X(\theta)|^2 = \mathbb{E}(\cos(\theta X))^2 + \mathbb{E}(\sin(\theta X))^2$$

L'inegalité de Cauchy donne $\mathbb{E}(\cos(\theta X))^2 \leq \mathbb{E}(\cos(\theta X)^2)$ et $\mathbb{E}(\sin(\theta X))^2 \leq \mathbb{E}(\sin(\theta X)^2)$ donc

$$|\Phi_X(\theta)|^2 \leq \mathbb{E}(\cos(\theta X)^2) + \mathbb{E}(\sin(\theta X)^2) = \mathbb{E}(\cos(\theta X)^2 + \sin(\theta X)^2) = 1$$

14 $\triangleright$ $X \sim \mathcal{G}(p)$, $p \in]0,1[$. Le théorème du transfert donne

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\cos(\theta\,(aX+b))) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \cos(\theta\,(ak+b))\mathbb{P}(X=k)\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \cos(\theta\,(ak+b))pq^{k-1}\\ &= \operatorname{Re}\sum_{k=1}^{+\infty} e^{i\theta(ak+b)}pq^{k-1}\\ &= \operatorname{Re}\frac{pe^{i\theta(a+b)}}{1-qe^{i\theta}}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\sin(\theta\,(aX+b))) &= \sum_{k=1}^{+\infty}\sin(\theta\,(ak+b))pq^{k-1}\\
&= \operatorname{Im}\sum_{k=1}^{+\infty}e^{i\theta(ak+b)}pq^{k-1}\\
&= \operatorname{Im}\frac{pe^{i\theta(a+b)}}{1-qe^{i\theta}}
\end{aligned}$$

d'où

$$\Phi_{aX+b}(\theta)=\frac{pe^{i(a+b)\theta}}{1-qe^{ia\theta}}.$$

15 $\triangleright$ $X\sim\mathcal{G}(p)$, $p\in\,]0,1[$.
Soit $k\in\mathbb{N}$, la variable aléatoire X^k est d'espérance finie si la série $\sum\limits_{n\geq 1}n^k\mathbb{P}(X=n)$ converge .
On a $n^k\mathbb{P}(X=n)=n^kpq^{n-1}$, comme $R_{cv}(\sum n^kx^n)=1$ donc $\sum\limits_{n\geq 1}n^kpq^{n-1}$ converge et $\mathbb{E}(X^k)$ existe.
On a

$$\Phi_X(\theta)=\frac{pe^{i\theta}}{1-qe^{i\theta}}=p\sum_{n=1}^{+\infty}q^{n-1}e^{in\theta}$$

Les séries $\sum\limits_{n\geq 1}q^{n-1}n^ke^{in\theta}$ convergent normalement sur $\mathbb{R}$, pour tout k dans $\mathbb{N}$, donc Φ_X de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\Phi_X^{(k)}(\theta)=p\sum_{n=1}^{+\infty}q^{n-1}(in)^ke^{in\theta}$$

Ainsi $\Phi_X^{(k)}(0)=p\sum\limits_{n=1}^{+\infty}q^{n-1}(in)^k=i^k\mathbb{E}\left(X^k\right)$ pour tout $k\in\mathbb{N}$.
16 $\triangleright$ Soit $f_k(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n^kx^n$ pour $x\in\,]-1,1[$. On a $f_0(x)=\dfrac{x}{1-x}$, supposons que $f_k(x)=\dfrac{xP_k(x)}{(1-x)^{k+1}}$ remarquons que $xf_k'(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n^{k+1}x^n=f_{k+1}(x)$ donc

$$f_{k+1}(x)=\frac{x((1-x)(xP_k(x))'+x(k+1)P_k(x))}{(1-x)^{k+2}}$$

qui est de la forme $f_{k+1}(x)=\dfrac{xP_{k+1}(x)}{(1-x)^{k+2}}$ et P_{k+1} un polynôme à coefficient dans $\mathbb{C}$, indépendant de p. D'où le résultat pour tout k dans $\mathbb{N}$. De plus $\frac{f_k(x)}{x}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}1$ donc $P_k(0)=1$.
La fonction $z\mapsto\dfrac{zP_k(z)}{(1-z)^{k+1}}$ est DSE en 0, par unicité des coefficients on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty}n^kz^n=\frac{zP_k(z)}{(1-z)^{k+1}}\text{ pour tout }|z|<1$$

Ainsi pout tout $\theta\in\mathbb{R}$

$$\Phi_X^{(k)}(\theta)=\frac{p}{q}i^kf_k(qe^{i\theta})=pi^k\frac{e^{i\theta}P_k(qe^{i\theta})}{(1-qe^{i\theta})^{k+1}}$$

17 $\triangleright$ On a

$$\Phi_X^{(k)}(0)=i^k\mathbb{E}\left(X^k\right)=i^k\frac{P_k(q)}{p^k}$$

donc

$$\left|\mathbb{E}\left(X^k\right)-\frac{1}{p^k}\right|\leq\frac{|P_k(q)-1|}{p^k}.$$

puisque $P_k(0)=1$ et P_k indépendant de p donc $P_k(q)=1+a_1q+..+a_rq^r$ et $|P_k(q)-1|\leq q(|a_1|+..+|a_r|)$, ce qui donne le résultat.

18 $\triangleright$ On a

$$\mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))^4\right)=\mathbb{E}\left(X^4\right)+4\mathbb{E}\left(X^3\right)\mathbb{E}\left(X\right)+6\mathbb{E}\left(X^2\right)\mathbb{E}\left(X\right)^2+4\mathbb{E}\left(X\right)\mathbb{E}\left(X\right)^3+\mathbb{E}\left(X\right)^4$$

l'inégalité précédente donne le résultat.

19 $\triangleright$ Y une variable aléatoire réelle centrée Y telle que Y^4 soit d'espérance finie.
Pour $k\in\{2,3\}$ et $t\in\mathbb{R}$ on a $|t|^k\leq 1+t^4$ ce qui prouve que Y^2 et $|Y|^3$ sont d'espérance finie.
L'inégalité de convexité donne

$$\mathbb{E}\left(Y^2\right)^2\leq\left(\mathbb{E}\left(Y^4\right)\right)$$

et

$$\mathbb{E}\left(|Y|^3\right)^{4/3}\leq\left(\mathbb{E}\left(\left(Y^4\right)^{4/3}\right)\right)$$

soit

$$\mathbb{E}\left(Y^2\right)\leq\left(\mathbb{E}\left(Y^4\right)\right)^{1/2}\text{ et }\mathbb{E}\left(|Y|^3\right)\leq\left(\mathbb{E}\left(Y^4\right)\right)^{3/4}$$

20 $\triangleright$ La formule Taylor avec reste intégrale donne Montrer, pour tout réel u, l'inégalité

$$e^{iu}-1-iu+\frac{u^2}{2}=\int_0^u\frac{i^3e^{it}}{2}(u-t)^2dt$$

donc

$$\left|e^{iu}-1-iu+\frac{u^2}{2}\right|\leq\frac{1}{2}\left|\int_0^u(u-t)^2dt\right|=\frac{|u|^3}{6}$$

Soit θ dans $\mathbb{R}$, on a

$$\Phi_Y(\theta)-1+\frac{\mathbb{E}\left(Y^2\right)\theta^2}{2}=\mathbb{E}(\cos(\theta Y)-1+\frac{Y^2\theta^2}{2})+i\mathbb{E}(\sin(\theta Y)-\theta Y)$$

car $\mathbb{E}(Y)=0$, donc

$$\left|\Phi_Y(\theta)-1+\frac{\mathbb{E}\left(Y^2\right)\theta^2}{2}\right|^2=\mathbb{E}\left(\cos(\theta Y)-1+\frac{Y^2\theta^2}{2}\right)^2+\mathbb{E}(\sin(\theta Y)-\theta Y)^2$$

de plus

$$\left|\mathbb{E}\left(\cos(\theta Y)-1+\frac{Y^2\theta^2}{2}\right)\right|\leq\mathbb{E}\left(\left|\cos(\theta Y)-1+\frac{Y^2\theta^2}{2}\right|\right)\leq\frac{|\theta|^3}{6}\mathbb{E}\left(|Y|^3\right)$$

et

$$\left|\mathbb{E}\left(\sin(\theta Y)-\theta Y\right)\right|\leq\mathbb{E}\left(\left|\sin(\theta Y)-\theta Y\right|\right)\leq\frac{|\theta|^3}{6}\mathbb{E}\left(|Y|^3\right)$$

donc

$$\left|\Phi_Y(\theta)-1+\frac{\mathbb{E}\left(Y^2\right)\theta^2}{2}\right|\leq\sqrt{2}\frac{|\theta|^3}{6}\mathbb{E}\left(|Y|^3\right)\leq\frac{|\theta|^3}{3}\mathbb{E}\left(|Y|^3\right)$$

finalement on a $\mathbb{E}\left(|Y|^3\right)\leq\left(\mathbb{E}\left(Y^4\right)\right)^{3/4}$ d'où le résultat.

21 $\triangleright$ Par la formule Taylor on obtient pour $x\geq 0$ $|e^{-x}-1+x|\leq\frac{x^2}{2}$, donc $\left|e^{-\frac{x^2}{2}}-1+\frac{x^2}{2}\right|\leq\frac{x^4}{8}$.
Pour tout réel θ, on a

$$\left|\exp\left(-\frac{\mathbb{E}\left(Y^2\right)\theta^2}{2}\right)-1+\frac{\mathbb{E}\left(Y^2\right)\theta^2}{2}\right|\leq\frac{\mathbb{E}\left(Y^2\right)^2\theta^4}{8}\leq\frac{\mathbb{E}\left(Y^4\right)\theta^4}{8}$$

ainsi

$$\begin{aligned}\left|\Phi_Y(\theta)-\exp\left(-\frac{\mathbb{E}\left(Y^2\right)\theta^2}{2}\right)\right| &\leq \left|\Phi_Y(\theta)-1+\frac{\mathbb{E}\left(Y^2\right)\theta^2}{2}\right|+\left|\exp\left(-\frac{\mathbb{E}\left(Y^2\right)\theta^2}{2}\right)-1+\frac{\mathbb{E}\left(Y^2\right)\theta^2}{2}\right|\\ &\leq \frac{|\theta|^3}{3}\left(\mathbb{E}\left(Y^4\right)\right)^{3/4}+\frac{\theta^4}{8}\mathbb{E}\left(Y^4\right)\end{aligned}$$

F. Convergence vers une gaussienne

22 $\triangleright$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z_1, \ldots, z_n, u_1, \ldots, u_n$ des complexes tous de module inférieur ou égal à 1.
L'inégalité est vraie pour $n = 1$, on la suppose pour un $n > 1$. Soit $z_1, \ldots, z_{n+1}, u_1, \ldots, u_{n+1}$ des complexes tous de module inférieur ou égal à 1.

$$\begin{aligned} \left|\prod_{k=1}^{n+1} z_k - \prod_{k=1}^{n+1} u_k\right| &= \left|z_{n+1}\left(\prod_{k=1}^{n} z_k - \prod_{k=1}^{n} u_k\right) - (z_{n+1} - u_{n+1})\prod_{k=1}^{n} u_k\right| \\ &\leq |z_{n+1}|\left|\prod_{k=1}^{n} z_k - \prod_{k=1}^{n} u_k\right| + |z_{n+1} - u_{n+1}|\prod_{k=1}^{n} |u_k| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} |z_k - u_k| + |z_{n+1} - u_{n+1}| \end{aligned}$$

d'où le résultat.

23 $\triangleright$ Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$. On considère, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, une variable aléatoire Z_k suivant la loi $\mathcal{G}\left(1 - e^{-kt}\right)$, et on a

$$Y_k = k\left(Z_k - \mathbb{E}\left(Z_k\right)\right) = kZ_k - \frac{k}{1 - e^{-kt}} \text{ et } E(Y_k^2) = \frac{ke^{-kt}}{(1 - e^{-kt})^2}$$

donc

$$\Phi_{Y_k}(\theta) = \frac{\left(1 - e^{-kt}\right)\exp(\frac{-i\theta e^{-kt}}{1 - e^{-kt}})}{1 - e^{k(i\theta - t)}}$$

On a

$$\begin{aligned} h(t, \theta) &= e^{-im_t\theta}\frac{P\left(e^{-t}e^{i\theta}\right)}{P\left(e^{-t}\right)} \\ &= \exp(-i\theta\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{ke^{-kt}}{1 - e^{-kt}})\lim_{N \to +\infty} \prod_{n=1}^{N} \frac{1 - e^{-nt}}{1 - e^{-nt}e^{i\theta n}}. \end{aligned}$$

.

ce qui donne

$$h(t, \theta) = \lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} \Phi_{Y_k}(\theta).$$

En déduire, à l'aide en particulier de la question 21$\triangleright$ l'inégalité

$$\left|\Phi_{Y_k}(\theta) - \exp\left(-\frac{\mathbb{E}\left(Y_k^2\right)\theta^2}{2}\right)\right| \leq \frac{|\theta|^3}{3}\left(\mathbb{E}\left(Y_k^4\right)\right)^{3/4} + \frac{\theta^4}{8}\mathbb{E}\left(Y_k^4\right)$$

$$\begin{aligned} \left|h(t, \theta) - e^{-\frac{\sigma_t^2\theta^2}{2}}\right| &= \lim_{n \to +\infty}\left|\prod_{k=1}^{n} \Phi_{Y_k}(\theta) - \prod_{k=1}^{n} \exp(\frac{-\theta^2k^2e^{-kt}}{2(1 - e^{-kt})^2})\right| \\ &\leq \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n}\left|\Phi_{Y_k}(\theta) - \exp(\frac{-\theta^2k^2e^{-kt}}{2(1 - e^{-kt})^2})\right| \quad (\text{ d'après } \mathbf{22} \triangleright) \\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty}\left|\Phi_{Y_k}(\theta) - \exp\left(-\frac{\mathbb{E}\left(Y_k^2\right)\theta^2}{2}\right)\right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|\theta|^3}{3}\left(\mathbb{E}\left(Y_k^4\right)\right)^{3/4} + \frac{\theta^4}{8}\mathbb{E}\left(Y_k^4\right) \\ &\leq K^{3/4}|\theta|^3 S_{3,3/4}(t) + K\theta^4 S_{4,1}(t). \end{aligned}$$

les questions **18** $\triangleright$ donne $\mathbb{E}\left(Y_k^4\right) \leq K\frac{k^4e^{-kt}}{(1 - e^{-kt})^4}$ donc

$$\left|h(t, \theta) - e^{-\frac{\sigma_t^2\theta^2}{2}}\right| \leq K^{3/4}\frac{|\theta|^3}{3}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{ke^{-3kt/4}}{\left(1 - e^{-kt}\right)^{3/4}} + \frac{K\theta^4}{8}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^4e^{-kt}}{\left(1 - e^{-kt}\right)^4}$$

d'où le résultat.

24 $\triangleright$ .On a d'après 11$\triangleright$

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= S_{2,1}(t)\\ &\underset{t\to 0^+}{=} \frac{1}{t^3}\int_0^{+\infty}\frac{x^2e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}\,\mathrm{d}x+O\left(\frac{1}{t^2}\right)\\ &\underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{\pi^2}{3t^3}\end{aligned}$$

d'où

$$\sigma_t \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{\pi}{\sqrt{3}t^{\frac{3}{2}}}$$

O n aussi d'après 11$\triangleright$

$$m_t=\frac{1}{t^2}\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}\,\mathrm{d}x+O\left(\frac{1}{t}\right)\underset{t\to 0^+}{=}\frac{\pi^2}{6t^2}+O\left(\frac{1}{t}\right)$$

Nous avons

$$\zeta(t,u)=\exp\left(i\frac{u}{\sigma_t}\left(m_t-\frac{\pi^2}{6t^2}\right)\right)\qquad\text{et}\qquad j(t,u)=\zeta(t,u)h\left(t,\frac{u}{\sigma_t}\right).$$

D'après23.,ona

$$\left|h\left(t,\frac{u}{\sigma_t}\right)-e^{-\frac{u^2}{2}}\right|\leqslant K^{\frac{3}{4}}\frac{|u|^3}{|\sigma_t|^3}\times O\left(\frac{1}{t^4}\right)+K\frac{u^4}{\sigma_t^4}\times O\left(\frac{1}{t^5}\right)=O(\sqrt{t})\underset{t\to 0}{\longrightarrow}0$$

et

$$\zeta(t,u)=\exp\left(\frac{iu}{\sigma_t}O\left(\frac{1}{t}\right)\right)=\exp(O(\sqrt{t}))\underset{t\to 0}{\longrightarrow}1$$

On en déduit que pour tout réel u, que

$$j(t,u)\underset{t\to 0^+}{\longrightarrow}e^{-u^2/2}$$

25 $\triangleright$ On a pour $\theta\in[-\pi,\pi],\cos\theta=1+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\theta^{2n}}{2n!}$, donc la fonction

$$g:\theta\mapsto\begin{cases}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2} & \text{si } \theta\neq 0\\ \frac{1}{2} & \text{si } \theta=0\end{cases}$$

est de classe C^∞ donc bornée et atteint ses borne , soit $\alpha=\inf\limits_{\theta\in[-\pi,\pi]}g(\theta)$, il existe $\theta_0\in[-\pi,\pi]$ telle que $\alpha=g(\theta_0)$, g ne s'annule pas sur $[-\pi,\pi]$ donc garde un signe constant celui de $g(0)$ donc $0<\alpha\ \leq\frac{1}{2}$et

$$\forall\theta\in[-\pi,\pi],1-\cos\theta\geq\alpha\theta^2.$$

On a, pour t assez proche de $0, e^{-t}\in\left[\frac{1}{2},t\right[$ donc :

$$\begin{aligned}|h(t,\theta)| &\leqslant \exp\left(-\frac{1-\cos\theta}{6\,(1-e^{-t})^3}\right)\quad\text{ou}\quad|h(t,\theta)|\leqslant\exp\left(-\frac{1}{3\,(1-e^{-t})}\right)\\ |h(t,\theta)| &\leqslant \exp\left(-\frac{\alpha\theta^2}{6\,(1-e^{-t})^3}\right)\quad\text{ou}\quad|h(t,\theta)|\leqslant\exp\left(-\frac{1}{3\,(1-e^{-t})}\right)\end{aligned}$$

On a $1-e^{-t}\leq t$ pour tout $t\geq 0$, donc

$$|h(t,\theta)|\leqslant\exp\left(-\frac{\alpha\theta^2}{6t^3}\right)\quad\text{ou}\quad|h(t,\theta)|\leqslant\exp\left(-\frac{1}{3t}\right)$$

Come $\sigma_t\underset{t\to 0^+}{\sim}\frac{\pi}{\sqrt{3}t^{\frac{3}{2}}}$ donc il existe $t_0>0$ tel que, pour tout $t\in[0,t_0]$

$$\frac{1}{2}\frac{\pi}{\sqrt{3}t^{\frac{3}{2}}}\leq\sigma_t\leq\frac{3}{2}\frac{\pi}{\sqrt{3}t^{\frac{3}{2}}}$$

d'où l'existence de $\beta > 0$ et $\delta > 0$ tels que, pour tout $t \in [0, t_0]$ et tout $\theta \in [-\pi, \pi]$,

$$|h(t,\theta)| \le e^{-\beta(\sigma_t\ \theta)^2} \quad \text{ou} \quad |h(t,\theta)| \le e^{-\delta(\sigma_t)^{2/3}}.$$

comme $\frac{|\theta|}{\pi} \le 1$ alors $e^{-\delta(\sigma_t)^{2/3}} \le e^{-\frac{\delta}{\pi^{2/3}}(\sigma_t|\theta|)^{2/3}}$ ce qui donne le résultat avec $\gamma = \frac{\delta}{\pi^{2/3}}$.

26 $\triangleright$ écrivons

$$\begin{aligned}\int_{-\pi\sigma_t}^{\pi\sigma_t} j(t,u)\mathrm{d}u &= \int_{-\pi\sigma_t}^{\pi\sigma_t} \zeta(t,u)h\left(t,\frac{u}{\sigma_t}\right)\mathrm{d}u \\ &= \int_{\mathbb{R}} \zeta(t,u)h\left(t,\frac{u}{\sigma_t}\right)\ 1_{[-\pi\sigma_t,\pi\sigma_t]}\ \mathrm{d}u\end{aligned}$$

de plus

$$\left|\zeta(t,u)h\left(t,\frac{u}{\sigma_t}\right)\ 1_{[-\pi\sigma_t,\pi\sigma_t]}\right| \le \left|h\left(t,\frac{u}{\sigma_t}\right)\ \right|$$

donc

$$\left|\zeta(t,u)h\left(t,\frac{u}{\sigma_t}\right)\ 1_{[-\pi\sigma_t,\pi\sigma_t]}\right| \le e^{-\beta u^2} \text{ ou } e^{-\gamma u^{2/3}}$$

le théorème de convergence dominée donne

$$\int_{-\pi\sigma_t}^{\pi\sigma_t} j(t,u)du \underset{t\to0^+}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\ \mathrm{d}u = \sqrt{2\pi}$$

G. La conclusion

27 $\triangleright$ En applique la formule (1) à $t = \frac{\pi}{\sqrt{6n}}$ donc $n = \frac{\pi^2}{6t^2}$,

$$\begin{aligned}p_n &= \frac{e^{\pi\sqrt{\frac{n}{6}}}P\left(e^{-\frac{\pi}{\sqrt{6n}}}\right)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta}\frac{P\left(e^{-\frac{\pi}{\sqrt{6n}}+i\theta}\right)}{P\left(e^{-\frac{\pi}{\sqrt{6n}}}\right)}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{e^{\pi\sqrt{\frac{n}{6}}}P\left(e^{-\frac{\pi}{\sqrt{6n}}}\right)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta}e^{im_t\theta}h(\frac{\pi}{\sqrt{6n}},\theta)\mathrm{d}\theta \\ &\underset{u=\theta\sigma_t}{=} \frac{e^{\pi\sqrt{\frac{n}{6}}}P\left(e^{-\frac{\pi}{\sqrt{6n}}}\right)}{2\pi\sigma_t}\int_{-\pi\sigma_t}^{\pi\sigma_t} e^{i(m_t-\frac{\pi^2}{6t^2})\frac{u}{\sigma_t}}h(\frac{\pi}{\sqrt{6n}},\frac{u}{\sigma_t})\mathrm{d}u \\ &= \frac{e^{\pi\sqrt{\frac{n}{6}}}P\left(e^{-\frac{\pi}{\sqrt{6n}}}\right)}{2\pi\sigma_t}\int_{-\pi\sigma_t}^{\pi\sigma_t} j(\frac{\pi}{\sqrt{6n}},u)\mathrm{d}u\end{aligned}$$

On a $\sigma_t \underset{t\to0^+}{\sim} \frac{\pi}{\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{\sqrt{6n}}\right)^{3/2}} = \frac{\sqrt{\pi}(6n)^{3/4}}{\sqrt{3}}$

$$p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}\frac{e^{\pi\sqrt{\frac{n}{6}}}P\left(e^{-\frac{\pi}{\sqrt{6n}}}\right)}{2\pi\sigma_t}$$

de plus $\sigma_t \underset{t\to0^+}{\sim} \frac{\pi}{\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{\sqrt{6n}}\right)^{3/2}} = \frac{\sqrt{\pi}(6n)^{3/4}}{\sqrt{3}}$ et $P\left(e^{-\frac{\pi}{\sqrt{6n}}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{(6n)^{1/4}}e^{2\pi\sqrt{\frac{n}{6}}}$

d'où la formule de Hardy et Ramanujan

$$p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^{2\pi\sqrt{\frac{n}{6}}}}{4\sqrt{3}n}$$