

PROBLEME 2

Les parties B et C sont liées, mais la partie A est indépendante du reste du problème.

On rappelle que, si p est un entier naturel non nul, la notation $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ représente l'algèbre des matrices carrées d'ordre p à coefficients réels.

Partie A :

Soit p un entier naturel non nul. Une matrice A de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est dite **nilpotente d'indice trois** si elle vérifie $A^2 \neq 0$ et $A^3 = 0$.

Dans toute cette partie, on note A une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, nilpotente d'indice trois. On note I la matrice-unité d'ordre p .

Pour tout réel t , on note $E(t)$ la matrice

$$E(t) = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2.$$

A.1. Vérifier la relation

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2 \quad E(s)E(t) = E(s+t).$$

A.2. En déduire que $(E(t))^n = E(nt)$ pour $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

A.3. Montrer que la matrice $E(t)$ est inversible. Quel est son inverse ?

A.4. Montrer que la famille (I, A, A^2) est libre dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

A.5. En déduire que l'application $E : t \mapsto E(t)$, de $\mathbb{R}$ vers $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, est injective.

A.6. Dans cette question, $p = 3$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Expliciter la matrice $E(t)$ sous la forme d'un tableau matriciel pour $t \in \mathbb{R}$.

PARTIE B :

Dans cette partie, on note $\mathcal{B}_0 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui lui est canoniquement associé.

B.1. Montrer que $F = \text{Ker}(f - 2 \text{id}_{\mathbb{R}^2})$ et $G = \text{Ker}(f - \text{id}_{\mathbb{R}^2})$ sont deux droites vectorielles, supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$. Préciser un vecteur directeur $\vec{u}$ de F , et un vecteur directeur $\vec{v}$ de G .

B.2. Sans calculs, déterminer la matrice de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ dans la base $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v})$.

B.3. En déduire qu'il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale (toutes deux carrées d'ordre deux) telles que $A = PDP^{-1}$. Expliciter P , D et P^{-1} .

B.4. Expliciter D^n pour tout entier naturel n . Démontrer la relation $A^n = P D^n P^{-1}$. En déduire l'expression de A^n sous forme de tableau matriciel.

Partie C :

On reprend les notations de la partie B.

C.1. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que, pour tout réel t , on a

$$e^t = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} \right).$$

On pourra admettre le résultat de cette question pour traiter les suivantes.

C.2. Pour tout réel t , pour tout entier naturel n , on note $E_n(t)$ la matrice définie par $E_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} A^k$. On

écrira cette matrice sous la forme $E_n(t) = \begin{pmatrix} a_n(t) & b_n(t) \\ c_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}$.

Expliciter (sous forme de sommes) ses coefficients $a_n(t)$, $b_n(t)$, $c_n(t)$, $d_n(t)$.

C.3. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $E(t)$ la matrice $E(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$, avec $a(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n(t)$, $b(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n(t)$, etc. Expliciter la matrice $E(t)$.

Réponse partielle : on obtient $a(t) = 3e^{2t} - 2e^t$.

C.4. Montrer qu'il existe deux matrices Q et R (carrées d'ordre deux) telles que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad E(t) = e^{2t} Q + e^t R$$

et expliciter Q et R .

C.5. Calculer les matrices Q^2 , R^2 , QR , RQ . Que peut-on dire des endomorphismes q et r de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associés aux matrices Q et R (on pourra préciser la réponse en utilisant les droites F et G de la question **B.1.**) ?

C.6. En déduire que

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2 \quad E(s)E(t) = E(s+t) .$$

Que dire de $(E(t))^n$ pour $n \in \mathbb{N}$?, de $(E(t))^{-1}$?

L'application $E : t \mapsto E(t)$, de $\mathbb{R}$ vers $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, est-elle injective ?