Etude d'une fonction périodique

L'objectif de ce problème est d'étudier la fonction f présentée dans la question 2.

1. On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(t) = \arcsin(\sin 2t)$.

1.a Etudier la parité et la périodicité de la fonction φ.

1.b Simplifier φ pour $t \in [0, \pi/4]$ et pour $t \in [\pi/4, \pi/2]$.

1.c Donner l'allure de la courbe représentative de φ.

2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$.

2.a Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $|2x| \leq 1 + x^2$.

2.b Préciser le domaine de définition de f, i.e. l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels $f(x)$ existe.

2.c Justifier que la courbe représentative de f présente un centre de symétrie.

3. On se propose ici de dresser le tableau de variation :

3.a Pour $t \in]-\pi/2, \pi/2[$, simplifier $\dfrac{2\tan t}{1+\tan^2 t}$ puis $f(\tan t)$.

3.b Exprimer, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ à l'aide de la fonction φ et de la fonction $\arctan$.

3.c En déduire les variations de f.

3.d Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$ en précisant les valeurs extrémales de f ainsi que ses limites en $+\infty$ et $-\infty$.

4. Dans cette question, on se propose de représenter la fonction f.

4.a Calculer $f'(x)$ pour $x \in]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$.

4.b Donner l'équation de la tangente à f en 0, en $\sqrt{3}$ et en $1/\sqrt{3}$

4.c Déterminer la limite de $f'(x)$ quand x tend vers 1 par valeurs supérieures (resp. inférieures).
On admettra que les valeurs obtenues sont les pentes des tangentes à droite et à gauche à f en 1.

4.d Représenter f relativement à un repère orthonormé dont l'unité serait de 2cm.
On précisera, les tangentes de la question 4.b ainsi que les tangentes à droites et à gauche en 1 et en -1.

5. Une droite parallèle à l'axe (Ox) d'équation $y = h$ avec $h \in]0, \pi/2[$ coupe la courbe représentative de f en deux points M_1 et M_2 d'abscisses x_1 et x_2 avec $x_1 < x_2$.

5.a Calculer x_1 et x_2.

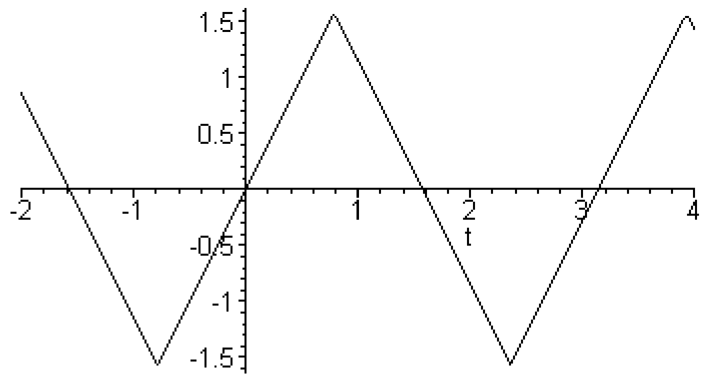
5.b Déterminer et construire la courbe décrite par le milieu I du segment $[M_1, M_2]$.

Correction

1.a $\forall t \in \mathbb{R}, -t \in \mathbb{R}$ et $\varphi(-t) = \cdots = -\varphi(t)$ donc φ est impaire.
$\forall t \in \mathbb{R}, t + \pi \in \mathbb{R}$ et $\varphi(t+\pi) = \arcsin(\sin(2t + 2\pi)) = \varphi(t)$ donc φ est π périodique.

1.b Pour $t \in [0, \pi/4]$, on a $2t \in [0, \pi/2] \subset [-\pi/2, \pi/2]$ donc $\varphi(t) = \arcsin(\sin 2t) = 2t$.
Pour $t \in [\pi/4, \pi/2]$, on a $2t \in [\pi/2, \pi]$. Puisque $\sin 2t = \sin(\pi - 2t)$ et que $\pi - 2t \in [0, \pi/2] \subset [-\pi/2, \pi/2]$ on a $\varphi(t) = \pi - 2t$.

1.c De part les simplifications qui précèdent, l'imparité et la périodicité, on obtient l'allure ci-dessous :



2.a $(1+x)^2 \geq 0$ donne $-2x \leq 1+x^2$ et $(1-x)^2 \geq 0$ donne $2x \leq 1+x^2$. Par suite $|2x| \leq 1+x^2$.

2.b Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1+x^2 \neq 0$ donc $\frac{2x}{1+x^2}$ existe et par la question précédente $\frac{2x}{1+x^2} \in [-1,1]$, or la fonction arcsin est définie sur $[-1,1]$ donc $\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$ existe. Ainsi f est définie sur $\mathbb{R}$.

2.c f est impaire donc sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère.

3.a $\dfrac{2\tan t}{1+\tan^2 t} = \dfrac{2\dfrac{\sin t}{\cos t}}{1+\dfrac{\sin^2 t}{\cos^2 t}} = \dfrac{2\sin t\cos t}{\cos^2 t+\sin^2 t} = \sin 2t$ et $f(\tan t) = \arcsin\sin 2t = \varphi(t)$.

3.b $f(x) = f(\tan(\arctan x)) = \varphi(\arctan x)$.

3.c La fonction arctan est croissante sur $]-\infty,-1]$ à valeurs dans, $]-\pi/2,-\pi/4]$ où φ est décroissante donc par composition f est décroissante sur $]-\infty,1]$.
La fonction arctan est croissante sur $[-1,1]$ à valeurs dans, $[-\pi/4,\pi/4]$ où φ est croissante donc par composition f est croissante sur $[-1,1]$.
La fonction arctan est croissante sur $[1,+\infty[$ à valeurs dans, $[\pi/4,\pi/2[$ où φ est décroissante donc par composition f est décroissante sur $[1,+\infty[$.

3.d

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\pi/2$	$\nearrow$	$\pi/2$	$\searrow$	0

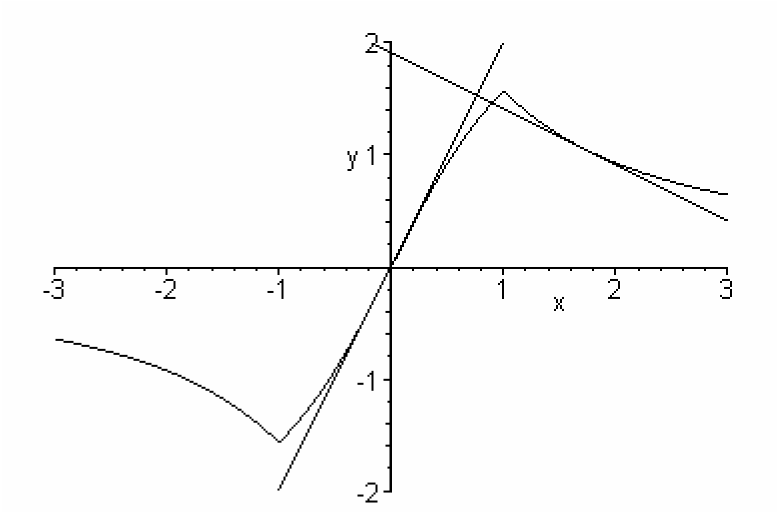
Limites et valeurs sont immédiates sachant $\arcsin 1 = \pi/2$ et $\arcsin 0 = 0$.

4.a Sur $]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$ on a $\frac{2x}{1+x^2} \in]-1,1[$ et la fonction arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ donc f est dérivable sur le domaine considéré et, après calculs : $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{1+x^2} & \text{si } |x|<1 \\ \dfrac{-2}{1+x^2} & \text{si } |x|>1 \end{cases}$.

4.b $f(0)=0$ et $f'(0)=2$ donc la tangente en 0 a pour équation $y=2x$.
$f(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$ et $f'(\sqrt{3}) = -1/2$ donc la tangente en $\sqrt{3}$ a pour équation $y = -\frac{1}{2}(x-\sqrt{3})+\frac{\pi}{3}$.
$f(1/\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$ et $f'(1/\sqrt{3}) = 3/2$ donc la tangente en $1/\sqrt{3}$ a pour équation $y = \frac{3}{2}(x-\frac{1}{\sqrt{3}})+\frac{\pi}{3}$.

4.c $\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = -1$.

4.d



5.a $f(x)=h \Leftrightarrow \dfrac{2x}{1+x^2}=\sin h$ (l'équivalence est vraie car $h\in\left]0,\pi/2\right[$)

Les solutions de l'équation $\dfrac{2x}{1+x^2}=\sin h$ sont $x_1=\dfrac{1-\cos h}{\sin h}$ et $x_2=\dfrac{1+\cos h}{\sin h}$.

5.b Le point I a pour coordonnée $\begin{cases}x=1/\sin h\\ y=h\end{cases}$.

Les coordonnées du point I vérifie $y=\arcsin\dfrac{1}{x}$ et $x>1$.

La représentation graphique de la fonction $x\mapsto \arcsin x$ sur $\left]-1,+\infty\right[$ donne le lieu des points I .

Cette représentation est aisée car

x	1		$+\infty$
$\arcsin\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\searrow$	0

: