

Probabilités

Partie 4

Dans toute cette partie, $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ est un espace probabilisé.

Cette partie constitue la suite des Partie 1, Partie 2 et Partie 3

I) Lois Continues (ou à densité)

1) Généralités

Déf 1

Soit X une variable aléatoire réelle (var), de fonction de répartition F .

X est dite à loi continue si et ssi :

- 1) F est continue sur $\mathbb{R}$.
- 2) F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, sauf en un nombre fini de points, éventuellement vide.

Abbréviation $X \text{ var } C$.

Prop 2

Si X est une varc, alors toutes les expressions suivantes sont égales :

$$1) P(a \leq X \leq b)$$

$$2) P(a \leq X < b)$$

$$3) P(a < X \leq b)$$

$$4) P(a < X < b)$$

$$5) F(b) - F(a)$$

où $a < b$ deux réels.

Déf 3 (Densité)

Soit X une varc.

Notons H l'ensemble des points où F est de classe C^1 .

On appelle **densité** de X la fonction f_X définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$f_x(x) = \begin{cases} F'(x) & \text{si } x \in H \\ 0 & \text{si } x \notin H \end{cases}$$

NB: On note aussi f s'il n'y a pas risque de confusion.

Prop 4

Soit X une var. de densité f et de fonction répartition F . On a:

1) $f \geq 0$

2) $\forall a, b \in \mathbb{R}, \text{ avec } a < b, F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx = P(a \leq X \leq b)$

3) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ converge et on a : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$

4) $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$

Démo

1) $f \geq 0$?

Sur H , $f = F' \geq 0$ car F croissante et dérivable.

Sur $\bar{H}$, $f = 0$

Donc $f \geq 0$ sur $\mathbb{R}$.

$$2) i) \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b \\ = F(b) - F(a)$$

$$ii) P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a) \quad (\text{car } F \text{ continue ; déjà vu})$$

$$3) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \text{ converge et on a : } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \underline{1} ?$$

On a que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \text{ converge} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) \text{ existent}$$

$$\text{et dans ce cas : } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = [F(x)]_{-\infty}^{+\infty} \left(\text{càd } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) \right)$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$

$$\text{Donc } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \text{ converge et on a : } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \underline{1}$$

$$4) \forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt ?$$

$$\int_{-\infty}^x f(t) dt = [F(t)]_{-\infty}^x$$

$$= F(x) - \lim_{t \rightarrow -\infty} F(t)$$

$$= F(x) \quad \underbrace{\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t)}_{=0}$$





à
retenir

Pour montrer qu'une fonction $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est une densité de probabilités, on vérifie les 3 points suivants:

1) $f \geq 0$

2) f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points (éventuellement vide)

3) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ converge et vaut 1.

Exemples (qui donnent les lois continues usuelles)

Exemple 1

Soient $C > 0$ et $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, où $a < b$.

Considérons la fonction $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ définie par:

$$f(t) = \begin{cases} C & \text{si } t \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer la valeur de C pour que f soit une densité de probabilités.

Exemple 2

Soient $\lambda > 0$ et $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ définie par :

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que f est une densité de probabilités.

Exemple 3

Soient $C > 0$ et $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = C e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Déterminer C pour que f soit une densité de probabilités.

Rappel: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ (intégrale de Gauss)

Exemple 4

Soient $C > 0$, $\sigma > 0$ et $m \in \mathbb{R}$.

Considérons la fonction $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = C e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Déterminer C pour que f soit une densité de probabilités.

Rappel: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ (intégrale de Gauss)

Exemple 5

Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

Considérons la fonction $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Montrer que f est une densité de probabilités.

Rappel: $\forall x > 0, \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$
(Fonction gamma)

Solution

Exemple 1

Soient $c > 0$ et $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, où $a < b$.

Considérons la fonction $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ définie par :

$$f(t) = \begin{cases} c & \text{si } t \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminons la valeur de C pour que f soit une densité de probabilités.

1) $f \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ (clair).

2) On a que f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{a, b\}$

3) On a $f(t) = \begin{cases} C & \text{si } t \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge (pour tout $C > 0$), et on a:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt &= \int_a^b C dt \\ &= C(b-a) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1 \Leftrightarrow C = \frac{1}{b-a}$$

Enfin, pour $C = \frac{1}{b-a}$, f est une densité de probabilités



Exemple 2

Soient $\lambda > 0$ et $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ définie par :

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrons que f est une densité de probabilités.

1) $f \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ (Clair).

2) On a que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

3) Il que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge et vaut 1.

$$\text{On a } f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{Alors } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt \text{ converge} \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt < \infty$$

Ce qui est vrai car $\lambda > 0$.

En plus, on a :

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt \right. \\ \left. = 1 \right) \quad \left(\text{car } \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} \right) \quad \text{Cours}$$

Enfin, f est une densité de probabilités.



Exemple 3

Soient $c > 0$ et $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = c e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Déterminons c pour que f soit une densité de probabilités.

1) $f \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ (Clair).

2) On a que f est continue sur $\mathbb{R}$.

3) Déterminons c pour que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ converge et vaille 1.

On a que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge et vaut $\sqrt{\pi}$.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \text{ converge} &\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} c e^{-\frac{x^2}{2}} dx < \infty \\ &\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} dx < \infty \end{aligned}$$

Considérons le changement de variable : $t = \frac{x}{\sqrt{2}}$.

$$\text{On a : } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} dx < \infty \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \cdot \sqrt{2} dt < \infty$$

et dans ce cas, on a

$$dx = \sqrt{2} dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \cdot \sqrt{2} dt$$

Et puisque $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge et vaut $\sqrt{\pi}$.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ converge et on a :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= C \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= C \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} dx \\ &= C \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \cdot \sqrt{2} dt \end{aligned}$$

$$t = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = C\sqrt{2} \times \sqrt{\pi}$$

D'où :

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \Leftrightarrow C\sqrt{2} \times \sqrt{\pi} = 1 \right.$$

$$\Leftrightarrow C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

Enfin, pour $C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, f est une densité de probabilité.



Exemple 4

Soient $C > 0$, $\sigma > 0$ et $m \in \mathbb{R}$.

Considérons la fonction $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = C e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Déterminons C pour que f soit une densité de probabilité.

1) $f \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ (Clair).

2) On a que f est continue sur $\mathbb{R}$.

3) Déterminons C pour que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ converge et vaille 1.

Soit $C > 0$. On a :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \text{ converge} &\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} C e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx \text{ converge} \\ &\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x-m}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2} dx \text{ CV} \end{aligned}$$

En considérant le changement de variable :

$$t = \frac{x-m}{\sqrt{2}\sigma}$$

$$dx = \sqrt{2}\sigma dt$$

→ bonillon

On a alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x-m}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2} dx \text{ CV} \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \cdot \sqrt{2}\sigma dt \text{ CV}$$

Ce qui est vrai, vu que l'intégrale de Gauss $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \sim CV$.

D'où $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ converge.

Et on a que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} C e^{-\left(\frac{x-m}{\sqrt{2} \sigma}\right)^2} dx$$

$$= C \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x-m}{\sqrt{2} \sigma}\right)^2} dx$$

$$= C \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \cdot \sqrt{2} \sigma dt \quad \left(\begin{array}{l} \text{via le chang de variable} \\ \text{ou} \end{array} \right)$$

$$= C \cdot \sqrt{2} \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi}$$

$$\text{Donc } \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1} \Leftrightarrow C \sigma \sqrt{2\pi} = 1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{C = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}}}$$

Enfin, pour $\boxed{C = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}}}$, f est une densité de probabilité.



Exemple 5

Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

Considérons la fonction $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Montrer que f est une densité de probabilités.

$$\forall x > 0, \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

Rappel

- 1) $f \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ (Claire).
- 2) On a que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
- 3) Il s'agit de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ converge et vaut 1.

On a :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \text{ converge} &\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx \text{ converge} \\ &\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx \text{ converge} \end{aligned}$$

$$\forall x > 0, \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \text{ Converge}$$

Rappel

En considérant le changement de variable

$$t = \beta x$$

brouillon

$$dx = \frac{1}{\beta} dt$$

on a alors que :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx \text{ Converge} &\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha-1}} e^{-\frac{t}{\beta}} \frac{1}{\beta} dt \text{ Converge} \\ &\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt \text{ Converge} \end{aligned}$$

Ce qui est vrai car $\alpha > 0$ et c'est l'intégrale gamma.

D'où $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ Converge.

En plus, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \beta^{\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \beta^\alpha \cdot \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \beta^\alpha \cdot \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha-1}} e^{-t} \cdot \frac{1}{\beta} dt \quad \left(\begin{array}{l} \text{via le chang de} \\ \text{variable } t = \beta x \end{array} \right)$$

$$\forall x > 0, \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

Rappel

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \underbrace{\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt}_{= \Gamma(\alpha)}$$

$$= 1$$

Enfin, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ converge et vaut 1.



2) Lois Continues usuelles

a) Loi Uniforme sur le segment $[a, b]$

Densité : $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Notation: $X \leadsto \mathcal{U}([a, b])$

b) Loi exponentielle de paramètre λ (où $\lambda > 0$)

Densité : $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Notation: $X \leadsto \mathcal{E}(\lambda)$

c) Loi normale de paramètres $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$

Densité : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$

Notation: $X \leadsto \mathcal{N}(m, \sigma)$

Cas particulier

Loi normale Centrée réduite

Densité : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

Notation : $X \leadsto \mathcal{N}(0, 1)$

d) Loi gamma de paramètres (α, β) , où $\alpha > 0$ et $\beta > 0$

Densité : $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

Notation : $X \leadsto \Gamma(\alpha, \beta)$

II) Espérance

1) Définition

Déf

Soit X une varc de densité f .

1) On dit que X possède une espérance si et si la fonction $t \mapsto t f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

2) Dans ce cas, l'espérance de X est :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$$

2) Espérances des lois continues usuelles

Prop 1 (Loi uniforme)

Soit $X \sim \mathcal{U}([a, b])$.

X possède une espérance et on a :

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

Démo

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$$

Rappel

On a :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$$

$$= \int_a^b t \cdot \frac{1}{b-a} dt \quad (\text{car } \forall t \notin [a, b], f(t) = 0)$$

$$= \frac{1}{b-a} \left[\frac{t^2}{2} \right]_a^b$$

$$= \frac{1}{2(b-a)} \cdot (b^2 - a^2)$$

$$= \frac{b+a}{2}$$

□

Prop 2 (Loi exponentielle)

Soit $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, où $\lambda > 0$.

X possède une espérance et on a :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$$

Rappel

On a :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$$

$$= \int_0^{+\infty} t \cdot \lambda e^{-\lambda t} dt \quad (\text{car } \forall t < 0, f(t) = 0)$$

$$= \int_0^{+\infty} t \cdot (-e^{-\lambda t})' dt$$

$$= \left[-t e^{-\lambda t} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt$$

par intégration par parties : $\lim_{t \rightarrow +\infty} t e^{-\lambda t} = 0$ par croissance comparée ($\lambda > 0$) et $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt$ converge (vaut $\frac{1}{\lambda}$).

Enfin, X possède une espérance et que

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$



Prop 3 (Loi normale)

Soit $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$, où $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$.

X possède une espérance et on a :

$$E(X) = m$$

Démo

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$$

Rapports

On a :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt$$

$$E(X) \stackrel{?}{=} m$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-\left(\frac{t-m}{\sqrt{2} \sigma}\right)^2} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sqrt{2} \sigma x + m) e^{-x^2} \cdot \sqrt{2} \sigma dx$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{via le chang de variable} \\ x = \frac{t-m}{\sqrt{2} \sigma} \end{array} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sqrt{2} \sigma x + m) e^{-x^2} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\sqrt{2} \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx + m \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\sqrt{2} \sigma \cdot \underbrace{\left[\frac{e^{-x^2}}{-2} \right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} + m \cdot \sqrt{\pi} \right)$$

$$= m$$

D'où

$$E(X) = m$$



Corollaire 4 (Loi normale centrée réduite)

Soit $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$

X possède une espérance et on a :

$$E(X) = 0$$

Prop 5 (Loi gamma)

Soit $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$, où $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

X possède une espérance et on a :

$$E(X) = \frac{\alpha}{\beta}$$

Démo

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Rapports

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$$

On a :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$$

$$= \int_0^{+\infty} t f(t) dt \quad (\text{car } \forall t \leq 0, f(t) = 0)$$

$$= \int_0^{+\infty} t \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \beta^\alpha t^{\alpha-1} e^{-\beta t} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \beta^\alpha t^\alpha e^{-\beta t} dt$$

$$E(X) \stackrel{?}{=} \frac{\alpha}{\beta}$$

Ce qu'on veut ↗

$$\forall x > 0, \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

Rappel

$$= \frac{1}{\Gamma(x)} \beta^x \int_0^{+\infty} t^x e^{-\beta t} dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(x)} \beta^x \int_0^{+\infty} \frac{x}{\beta^x} e^{-x} \cdot \frac{1}{\beta} dx \quad \left(\begin{array}{l} \text{via le changement de variable} \\ x = \beta t \end{array} \right)$$

$$= \frac{1}{\beta \Gamma(x)} \int_0^{+\infty} x^x e^{-x} dx$$

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{x-1} dx$$

Rappel

$$= \frac{1}{\beta \Gamma(x)} \int_0^{+\infty} x^x (-e^{-x})' dx$$

$$= \frac{1}{\beta \Gamma(x)} \left(\underbrace{\left[-x^x e^{-x} \right]_0^{+\infty}}_{=0} + \underbrace{\int_0^{+\infty} x^{x-1} e^{-x} dx}_{=\Gamma(x)} \right) \quad \left(\begin{array}{l} \text{via une} \\ \text{IPP} \end{array} \right)$$

$$= \frac{x}{\beta}$$

On finit :

$$E(X) = \frac{x}{\beta}$$



3) Formule de transfert

Prop

Soit X une varc de densité f .

Soit $g \in \mathcal{R}^{\mathbb{R}}$.

1) $g(X)$ possède une espérance si et si la fonction $t \mapsto g(t)f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

2) Dans ce cas, on a :

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(t) dt$$

III) Moments et variances

Soit X une varc.

★ Les définitions suivantes sont calquées sur celles d'une vard :

→ Le moment d'ordre k de X .

→ La variance de X .

→ L'écart-type...

★ Leurs propriétés chez une vard sont préservées chez une varc.

Espérances et variances des lois continues usuelles

Loi de X	$E(X)$	$V(X)$
$X \sim U([a, b])$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(a-b)^2}{12}$
$X \sim \mathcal{G}(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$	m	σ^2
$X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta^2}$

Démo

① $X \sim U([a, b])$. On a $E(X) = \frac{a+b}{2}$. $\mathcal{M}$ pour $V(X) = \frac{(a-b)^2}{12}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{On a } V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= E(x^2) - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

2^e autre part, on a :

$$E(x^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt \quad (\text{Formule de transfert})$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \int_a^b t^2 \cdot \frac{1}{b-a} dt \quad (\text{car } t \notin [a, b], f(t) = 0)$$

$$= \frac{1}{b-a} \times \frac{1}{3} \times (b^3 - a^3)$$

$$= \frac{b^2 + ab + a^2}{3}$$

Alors :

$$V(x) = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4}$$

$$= \frac{4(a^2 + ab + b^2) - 3(a^2 + b^2 + 2ab)}{12}$$

$$= \frac{a^2 - 2ab + b^2}{12}$$

$$= \frac{(a-b)^2}{12}$$

$$V(x) = \frac{(a-b)^2}{12}$$

② $X \sim \mathcal{G}(\lambda)$. On a $E(X) = \frac{1}{\lambda}$. $\mathcal{M}_{\text{var}} V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{On a } V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= E(X^2) - \frac{1}{\lambda^2}$$

D'autre part, on a :

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt \quad (\text{Formule de transfert})$$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \int_0^{+\infty} t^2 \cdot \lambda e^{-\lambda t} dt \quad (\text{car } \forall t < 0, f(t) = 0)$$

$$= \int_0^{+\infty} t^2 \cdot (-e^{-\lambda t})' dt$$

$$= \underbrace{\left[-t^2 e^{-\lambda t} \right]_0^{+\infty}}_{=0, \text{ Croissance Comparée}} + 2 \int_0^{+\infty} t e^{-\lambda t} dt \quad \left(\begin{array}{l} \text{via une} \\ \text{IPP} \end{array} \right)$$

= 0, Croissance Comparée

Et on a $E(X) = \int_0^{+\infty} t \cdot \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$

Alors $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-\lambda t} dt = \frac{2}{\lambda^2}$

$\Rightarrow E(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}$

Par suite :

$$\left(\begin{aligned} V(X) &= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned} \right)$$

③ $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$. On a $E(X) = m$. Alors $V(X) = \sigma^2$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\begin{aligned} \text{On a } V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= E(X^2) - m^2 \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt \quad (\text{Formule de transfert})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\left(\frac{t-m}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sqrt{2}\sigma x + m)^2 e^{-x^2} \cdot \sqrt{2}\sigma dx$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{via le chang} \\ \text{de variable :} \\ x = \frac{t-m}{\sqrt{2}\sigma} \end{array} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sqrt{2}\sigma x + m)^2 e^{-x^2} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (2\sigma^2 x^2 + 2\sqrt{2}\sigma m x + m^2) e^{-x^2} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(2\sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx + 2\sqrt{2}\sigma m \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx}_{=0, \text{ déjà Calculé}} + m^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx}_{=\sqrt{\pi} \text{ ; intégral de Gauss}} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(2\sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx + m^2 \cdot \sqrt{\pi} \right)$$

2^e autre part, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \left(\frac{e^{-x^2}}{-2} \right)' dx$$

$$= \underbrace{\left[-\frac{x}{2} e^{-x^2} \right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0, \text{ croissant}} - \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{-2} dx}_{= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi} \text{ : intégrale de Gauss}} \quad \left(\begin{array}{l} \text{via une} \\ \text{IPP} \end{array} \right)$$

$= 0$, croissant
Comparaison

$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi}$: intégrale
de Gauss

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Par suite :

$$E(x^2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(2\sigma^2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} + m^2 \sqrt{\pi} \right)$$

$$= \sigma^2 + m^2$$

Enfin :

$$\left(V(x) = E(x^2) - m^2 \right)$$

$$= \sigma^2 + m^2 - m^2$$

$$= \sigma^2$$

④ $X \sim \Gamma(d, \beta)$. On a $E(X) = \frac{d}{\beta}$. *Alors* $V(X) = \frac{d}{\beta^2}$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(d)} \beta^d x^{d-1} e^{-\beta x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

On a $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$$= E(X^2) - \frac{d^2}{\beta^2}$$

D'autre part, on a :

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt \quad (\text{Formule de transfert})$$

$$= \int_0^{+\infty} t^2 f(t) dt \quad (\text{Car } \forall t \leq 0, f(t) = 0)$$

$$= \int_0^{+\infty} t^2 \cdot \frac{1}{\Gamma(d)} \beta^d t^{d-1} e^{-\beta t} dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \beta^\alpha \int_0^{+\infty} t^{\alpha+1} e^{-\beta t} dt$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx$$

Rappel

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \beta^\alpha \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha+1}}{\beta^{\alpha+1}} e^{-x} \cdot \frac{1}{\beta} dx \quad \left(\begin{array}{l} \text{via le changement de} \\ \text{variable} \\ x = \beta t \end{array} \right)$$

$$= \frac{1}{\beta^2 \Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} x^{\alpha+1} e^{-x} dx$$

$$= \frac{1}{\beta^2 \Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} x^{\alpha+1} (-e^{-x})' dx$$

$$= \frac{1}{\beta^2 \Gamma(\alpha)} \left(\underbrace{\left[-x^{\alpha+1} e^{-x} \right]_0^{+\infty}}_{=0 \text{ par Croissance Comparée}} + (\alpha+1) \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} dx \right)$$

$$= \frac{\alpha+1}{\beta^2 \Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} dx$$

$$= \frac{\alpha+1}{\beta^2 \Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} x^\alpha (-e^{-x})' dx$$

IPP $\rightarrow$

$$= \frac{\alpha+1}{\beta^2 \Gamma(\alpha)} \left(\underbrace{\left[-x^\alpha e^{-x} \right]_0^{+\infty}}_{=0} + \alpha \underbrace{\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx}_{=\Gamma(\alpha)} \right)$$

$$\Rightarrow E(X^2) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}$$

$$\text{Ainsi : } V(X) = E(X^2) - \frac{\alpha^2}{\beta^2} \\ = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2}$$

$$= \frac{\alpha}{\beta^2}$$

$$V(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

→ ce qu'on veut



IV) Loi de la somme de deux var indépendantes

Prop 1 (Cas de 2 var : l'une discrète et l'autre continue)

Soient X_1 et X_2 deux var indépendantes telles que :

X_1 var d et $X_1(\Omega) = \mathcal{D}_1$,

X_2 var c de densité f_2 .

1) $S = X_1 + X_2$ est une var c .

2) Sa densité f_S est la fonction :

$$f_S(x) = \sum_{d \in \mathcal{D}_1} P(X_1 = d) f_2(x - d)$$

Prop 2 (Cas de 2 varc)

Soient X_1 et X_2 deux varc, indépendantes et de densités respectives f_1 et f_2 .

1) $S = X_1 + X_2$ est une varc.

2) Sa densité f_S est la fonction :

$$f_S(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(x-t) dt$$

$\Leftarrow f_S$ est le produit de convolution de f_1 et $f_2 \Rightarrow$

FIN