

Concours National Commun

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES 2 Session 2024 - Filière MP

L'usage de tout matériel électronique, y compris la calculatrice, est interdit.

Le sujet de cette épreuve est composé d'un exercice et d'un problème indépendants entre eux.

Durée: 4 heures

Exercice

(Noté 4 points sur 20)

On désigne par $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre 3. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ a base canonique de \mathbb{R}^3 et par I_3 la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On considère dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ les matrices suivantes:

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Vérifier que $PQ = 4I_3$.
 - En déduire que P est une matrice inversible et calculer sa matrice inverse P^{-1} .
- On considère les vecteurs suivants :

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } w = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Montrer que u est un vecteur propre de la matrice A dont on précisera la valeur propre α correspondante.
 - Montrer que v et w sont deux vecteurs propres de la matrice A associés à la même valeur propre β dont on précisera sa valeur.
 - Montrer qu'il existe une matrice diagonale D à préciser telle que $A = PDP^{-1}$.
- Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $A^n = PD^n P^{-1}$.
 - Déterminer, pour tout entier naturel n , D^n en fonction de n .
 - En déduire pour tout entier naturel n , l'expression de A^n en fonction de n sous forme d'un tableau.

Problème.

Dans tout le problème $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , on désigne par E un espace vectoriel sur \mathbb{K} de dimension n , $n \geq 1$ et par $\mathcal{L}(E)$ le \mathbb{K} -espace vectoriel des endomorphismes de E . On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans \mathbb{K} , $GL_n(\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, on note $f^0 = \text{id}_E$ et pour tout entier naturel k , $f^{k+1} = f^k \circ f$ où id_E désigne l'application identité de E . On note $\chi_f(X) = \det(X \text{id}_E - f)$ le polynôme caractéristique de f et on rappelle que $\chi_f(f) = 0$ où 0 désigne l'application nulle de E .

Pour une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pourra introduire le polynôme caractéristique de M défini par $\chi_M(X) = \det(XI_n - M)$. On dit que f est un endomorphisme nilpotent s'il existe un entier naturel non nul p tel que $f^p = 0$, le plus petit entier naturel non nul p vérifiant cette propriété est appelé indice de nilpotence de f .

Partie 1: Noyaux itérés

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, on note pour tout entier naturel k , $\mathcal{N}_k = \text{Ker}(f^k)$ et $\mathcal{I}_k = \text{Im}(f^k)$.

1. Montrer que la suite $(\mathcal{N}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(\mathcal{I}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion.
2. En déduire que $(\dim \mathcal{N}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'entiers naturels.
3. Justifier l'existence d'un plus petit entier naturel q tel que $\mathcal{N}_q = \mathcal{N}_{q+1}$.
4. Montrer que $\mathcal{I}_q = \mathcal{I}_{q+1}$.
5. Montrer que $\mathcal{N}_q \oplus \mathcal{I}_q = E$,
6. On considère pour tout entier naturel k , φ_k la restriction de f à \mathcal{I}_k .
 - a) Montrer que $\dim \mathcal{I}_k - \dim \mathcal{I}_{k+1} = \dim(\text{Ker}(f) \cap \mathcal{I}_k)$.
 - b) En déduire que la suite $(\dim \mathcal{N}_{k+1} - \dim \mathcal{N}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Partie 2 : Les endomorphismes nilpotents de rang $n - 1$

Soit U une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, de rang $n - 1$. On note u l'endomorphisme de E canoniquement associé à U . ($E = \mathbb{C}^n$)

1. Soient r et s deux entiers naturels et v la restriction de u^s à $\text{Im}(u^r)$.
 - a) Vérifier que $\text{Im}(v) = \text{Im}(u^{s+r})$.
 - b) Montrer que $\text{Ker}(v) \subset \text{Ker}(u^s)$.
 - c) Montrer que $\dim(\text{Ker}(u^{r+s})) \leq \dim(\text{Ker}(u^r)) + \dim(\text{Ker}(u^s))$.
 - d) En déduire que pour tout entier naturel i , $\dim(\text{Ker}(u^i)) \leq i$.
2. On suppose de plus que $U^n = 0$.
 - a) Montrer que pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, $\dim(\text{Ker}(u^i)) = i$.
 - b) Montrer que l'indice de nilpotence de u est égal à n .
 - c) En déduire qu'il existe un vecteur e de E tel que $\mathcal{B}_e = (e, u(e), \dots, u^{n-1}(e))$ soit une base de E .
 - d) Ecrire la matrice de u dans la base \mathcal{B}_e .
3. Montrer que deux matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang $n - 1$ sont semblables.

Partie 3 : Réduction d'un endomorphisme particulier

Dans cette partie $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit f un élément de $\mathcal{L}(E)$ vérifiant $(\text{id}_E, f, \dots, f^{n-1})$ est libre.

On considère $\chi_f(X) = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{m_k}$ le polynôme caractéristique χ_f de f , où $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les valeurs propres distinctes de f de multiplicités respectives m_1, \dots, m_p .

Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, on pose $F_k = \text{Ker}((f - \lambda_k \text{id}_E)^{m_k})$

1. Montrer que, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, le sous-espace vectoriel F_k est stable par f .

2. Montrer que $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$.
3. Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, on considère l'endomorphisme φ_k de F_k tel que, pour tout $x \in F_k$, $\varphi_k(x) = f(x) - \lambda_k x$.
- Montrer que pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, φ_k est un endomorphisme nilpotent de F_k .
 - Déterminer, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, la dimension de F_k .
 - Montrer que, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, l'indice de nilpotence de φ_k est m_k .
4. Montrer qu'il existe une base \mathcal{B} de E dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs, tel que chaque bloc est une matrice de $\mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{C})$ de la forme $A_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda_k \end{pmatrix}$.

Partie 4: Cycles

Dans cette partie, on prend $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On dit qu'un endomorphisme f de E est cyclique d'ordre un entier naturel non nul p s'il existe x_0 de E vérifiant les conditions :

- $f^p(x_0) = x_0$.
- $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est une famille génératrice de E dont les éléments sont distincts deux à deux.

On dit alors que la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est un p -cycle de f .

- Soit $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ un p -cycle de f .
 - Montrer que $f^p = \text{id}_E$.
 - Montrer que l'ensemble $F_{x_0} = \{k \in \mathbb{N}^* \mid (x_0, f(x_0), \dots, f^{k-1}(x_0)) \text{ est une famille libre}\}$ admet un maximum noté γ .
 - Montrer que pour tout entier k tel que $k \geq \gamma$, $f^k(x_0) \in \text{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{\gamma-1}(x_0))$.
 - Montrer que $\gamma = n$.
 - Déterminer le nombre des valeurs propres distinctes de f .
- Soit $\mathcal{B}_{x_0} = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ un n -cycle de f .
 - Justifier que \mathcal{B}_{x_0} est une base de E .
 - Déterminer la matrice G de l'endomorphisme f dans la base \mathcal{B}_{x_0} .
 - On pose $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $U_k = \begin{pmatrix} \bar{\omega}^k \\ \bar{\omega}^{-2k} \\ \vdots \\ \bar{\omega}^{-nk} \end{pmatrix}$, où $\bar{\omega}$ désigne le conjugué de ω .
Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, vérifier que U_k est un vecteur propre de G associé à une valeur propre α_k à déterminer.

3. Soit $M = (m_{k,l})_{1 \leq k,l \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telle que $m_{k,l} = \overline{\omega}^{kl}$. On note $\overline{M} = (\overline{m}_{k,l})_{1 \leq k,l \leq n}$, où $\overline{m}_{k,l}$ est le conjugué de $m_{k,l}$.

a) Calculer $M \overline{M}$.

b) En déduire que $M \in GL_n(\mathbb{C})$ et calculer M^{-1}

4. Soit $(b_0, b_1, \dots, b_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ et $H = \begin{pmatrix} b_0 & b_{n-1} & \dots & b_2 & b_1 \\ b_1 & \ddots & \ddots & & b_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{n-2} & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_1 & b_0 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que H est diagonalisable.

b) Déterminer les valeurs propres de H et une base de \mathbb{C}^n formée de vecteurs propres de H .

Partie 5 : La dimension maximale d'un sous-espace vectoriel des matrices nilpotentes

On note \mathcal{T} le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices triangulaires supérieures dont la diagonale est composée seulement par des 0. On désigne par $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et par \mathcal{N} l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Déterminer la dimension de \mathcal{T} .

2. Montrer que toute matrice nilpotente est semblable à une matrice appartenant à \mathcal{T} .

3. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{T}$.

4. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contenu dans \mathcal{N} telle que $\dim(F) > \frac{n(n-1)}{2}$. Montrer que $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap F) > 0$.

5. En déduire la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contenu dans \mathcal{N} .

- FIN DE L'ÉPREUVE -