Sol : (CNC 2014) (BCPST)

On a $X \rightsquigarrow \mathcal{E}(\lambda)$; f sa densité. $(\lambda > 0)$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & (\text{si } x \geq 0) \\ 0 & (\text{si } x < 0) \end{cases}$$

$$Y = [X]$$

Ainsi : $\begin{cases} Y \text{ à valeurs dans } \mathbb{Z} \\ \forall k \in \mathbb{Z},\ (Y = k) = (k \leq X < k+1) \end{cases}$

---

1) 1) Mq Y à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Il suffit de mq $X \geq 0$.

Càd $P(X < 0) = 0$

Rmq :

$$P(X<0)=P(X\leq 0)=\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = 0$$

car $(\forall x<0,\ f(x)=0)$

1)2) Soit $k\in\mathbb{N}^*$, $P(Y=k-1)=?$

$$P(Y=k-1)=P([X]=k-1)$$

$$=P(k-1\leq X<k)$$

f la densité de X

$$=\int_{k-1}^{k} f(x)\,dx=\int_{k-1}^{k}\lambda e^{-\lambda x}\,dx$$

Rappel

$$P(a\leq X\leq b)=F(b)-F(a)=\int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

C/C : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(Y=k-1) = e^{-\lambda k}(e^{\lambda}-1)}$

1)3) a) $(Y+1)$ suit une loi géométrique ; En effet :

(i) $(Y+1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$ car $Y(\Omega) = \mathbb{N}$

(ii) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$
\begin{aligned}
P(Y+1=k) &= P(Y=k-1) \\
&= e^{-\lambda k}(e^{\lambda}-1) \\
&= (e^{-\lambda})^{k}(e^{\lambda}-1) \\
&= (e^{-\lambda})^{k-1} \cdot e^{-\lambda}(e^{\lambda}-1) \\
&= (e^{-\lambda})^{k-1}(1-e^{-\lambda})
\end{aligned}
$$

C/C : $\boxed{(Y+1) \sim \mathcal{G}(1-e^{-\lambda})}$

1) 3) b) (i) On a $(Y+1) \sim G(p)$; où $p = 1 - e^{-\lambda}$

$$E(Y+1) = \frac{1}{p} = \frac{1}{1-e^{-\lambda}}$$

$$V(Y+1) = \frac{q}{p^2} = \frac{e^{-\lambda}}{(1-e^{-\lambda})^2}$$

Rappel : Si $X \sim G(p)$, on a $E(X) = \frac{1}{p}$ et $V(X) = \frac{q}{p^2}$ où $q = 1 - p$.

(ii) $E(Y) = E(Y+1) - 1 = \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}$

$V(Y) = V(Y+1) = \frac{e^{-\lambda}}{(1-e^{-\lambda})^2}$ $\quad V(aY+b) = a^2 V(Y)$

2) $Z = X - Y$; où $Y = [X]$

2) 1) $Z(\Omega) = [0, 1[$

2) 2) Soit $x \in [0, 1[$. On a :

$$P(Z \leq x) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(Z \leq x, Y = k) \quad \left(\text{car } (Y=k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ est un système complet d'évén} \right)$$

Formule des probas totales

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X - Y \leq x \underset{\text{et}}{,}\; Y = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X - k \leq x, Y = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X \leq x + k \underset{\text{et}}{,}\; k \leq X < k+1)$$

$$([X] = k) = (k \leq X < k+1)$$

Or $(X \leq x+k, \text{ et } k \leq X < k+1) = (k \leq X \leq x+k)$

! Car $x+k < k+1$

! $$P(Z \leq x) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(k \leq X \leq x+k)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\int_k^{x+k} f(t)\,dt \right)$$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)\,dt$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\int_k^{x+k} \lambda e^{-\lambda t}\,dt \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \left[-e^{-\lambda t} \right]_k^{x+k}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(x+k)} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda k} \left(1 - e^{-\lambda x} \right)$$

$$= \left(1 - e^{-\lambda x}\right) \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \left(e^{-\lambda}\right)^k$$

$0 < e^{-\lambda} < 1$

car $\lambda > 0$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

si $|q| < 1$

$$= \boxed{\frac{1 - e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda}}}$$

$\boxed{\text{CQFD}}$

2) 3) $E(Z) = ?$

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_Z(t)\,dt$$

Ona :

$$\left(\forall x \in [0,1[\,,\; F_Z(x) = \frac{1-e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda}}\right)$$

$$Z(\Omega) = [0,1[$$

$$\forall x < 0 \,,\; F_Z(x) = P(Z \leqslant x) = P(\phi) = 0$$

$$\forall x \geqslant 1 \,,\; F_Z(x) = P(Z \leqslant x) \overset{!}{=} P(Z < 1) = 1$$

$$f_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{\lambda e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda}} & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 0 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Ainsi :

$$E(Z) = \int_0^1 t f_Z(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{1-e^{-\lambda}} \int_0^1 \lambda t e^{-\lambda t}\, dt$$

$$= \frac{1}{1-e^{-\lambda}} \int_0^1 \left(-e^{-\lambda t}\right)' t\, dt$$

$$= \frac{1}{1-e^{-\lambda}} \left(\underbrace{\left[-e^{-\lambda t} t\right]_0^1}_{= -e^{-\lambda}} + \underbrace{\int_0^1 e^{-\lambda t}\, dt}_{= \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}} \right)$$

$$= \frac{1}{1-e^{-\lambda}} \left(\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} - e^{-\lambda} \right)$$

$$\boxed{E(Z) = \frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}}$$

Fin

RIR : On peut calculer $E(Z)$ par linéarité de l'espérance :

$$E(Z) = E(X-Y) = E(X) - E(Y)$$

$$= \frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}$$

$\blacksquare$