Extrait pour 1ères Années

Concours commun
Mines-Ponts

Extrait pour 1ères Années

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2024

Dans tout ce qui suit, x est un élément de $]0;1[$ fixé, et p un entier naturel.

Vous pouvez utiliser librement la linéarité de l'intégrale avec une somme infinie de fonctions.

Vous pouvez par exemple intérvertir l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}}$ avec la somme $\sum_{n=1}^{+\infty}$

1) Montrer que pour tout $\theta \in]-\pi\,;\pi[$, la fonction f définie par

$$f\ :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbf{C}$$
$$t\longmapsto \frac{t^{x-1}}{1+te^{\mathrm{i}\theta}}$$

est définie et intégrable sur $]0;+\infty[$.

2) Soit $\beta \in]0;\pi[$, *montrer que pour tout* $\theta \in [-\beta;\beta]$ *et* $t \in [0,+\infty[$,

$$|1+te^{i\theta}|^2 \geq |1+te^{i\beta}|^2 = (t+\cos(\beta))^2 + (\sin(\beta))^2.$$

3) Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\frac{t^{x-1}}{1+t} + \frac{t^{-x}}{1+t}\right)\mathrm{d}t.$$

On admet dans la suite que :

$$\forall y \in]0\,;\pi[,\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n y\sin(y)}{y^2-n^2\pi^2} = 1-\frac{\sin(y)}{y}.$$

4) Montrer que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\Big(\cos(t)\Big)^{2p+1}}{t^2}\ \mathrm{d}t$$

converge et que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\Big(\cos(t)\Big)^{2p+1}}{t^2}\ \mathrm{d}t = (2p+1)\int_0^{+\infty} \Big(\cos(t)\Big)^{2p}\ \frac{\sin(t)}{t}\ \mathrm{d}t.$$

5) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\int_{\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi} \Big(\cos(t)\Big)^{2p}\ \frac{\sin(t)}{t}\ \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\cos(t)\Big)^{2p}\ \frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\ \mathrm{d}t.$$

6) En déduire que :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \Big(\cos(t)\Big)^{2p}\ \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\cos(t)\Big)^{2p}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\Big)\ \mathrm{d}t.$$

7) En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} \Big(\cos(t)\Big)^{2p}\ \frac{\sin(t)}{t}\ \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\cos(t)\Big)^{2p}\ \mathrm{d}t.$$

Dans le cas $p=0$, cette intégrale est communément appelée "Intégrale de Dirichlet".

8) Montrer que :

$$(\cos(t))^{2p} = \frac{1}{2^{2p}}\left(\binom{2p}{p} + 2\sum_{k=0}^{p-1}\binom{2p}{k}\cos(2(p-k)t)\right).$$

Indication : On pourra développer $\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^{2p}$.

9) En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\Big(\cos(t)\Big)^{2p+1}}{t^2}\ \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\ \frac{(2p+1)!}{2^{2p}.(p!)^2}\cdot$$

10) Soient $a, b \in \mathbf{R}$ tels que $a \neq 0$ et $|b| \leq |a|$. Montrer que

$$|a+b| = |a| + \mathrm{signe}(a)\ b$$

où $\mathrm{signe}(x) = x/|x|$ pour x réel non nul.

11) Montrer que pour tout $s \in \mathbf{R}$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}\ \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}|s|.$$

Fin