Séries entières
Résumé

I) Généralités

1) Définitions

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe.

Déf 1 La série entière associée à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

Vocabulaire :
Le domaine de convergence de la série entière (SE) $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est l'ensemble des complexes z tels que la série complexe $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge.

$z\in D \iff \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge

Autrement dit :
C'est le domaine de définition de la fonction :

$$f : z\in\mathbb{C} \longmapsto f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

NB : Pour $z=0$, toute SE $\sum_n a_n z^n$ converge.

2) Rayon de convergence d'une SE

Déf 1 (Rayon de convergence)
Le rayon de convergence de la SE $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est :

$$R = \sup\left(\left\{ r\geq 0 \;/\; (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite bornée} \right\}\right)$$

Prop 2 Soit R le rayon de convergence de la SE $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

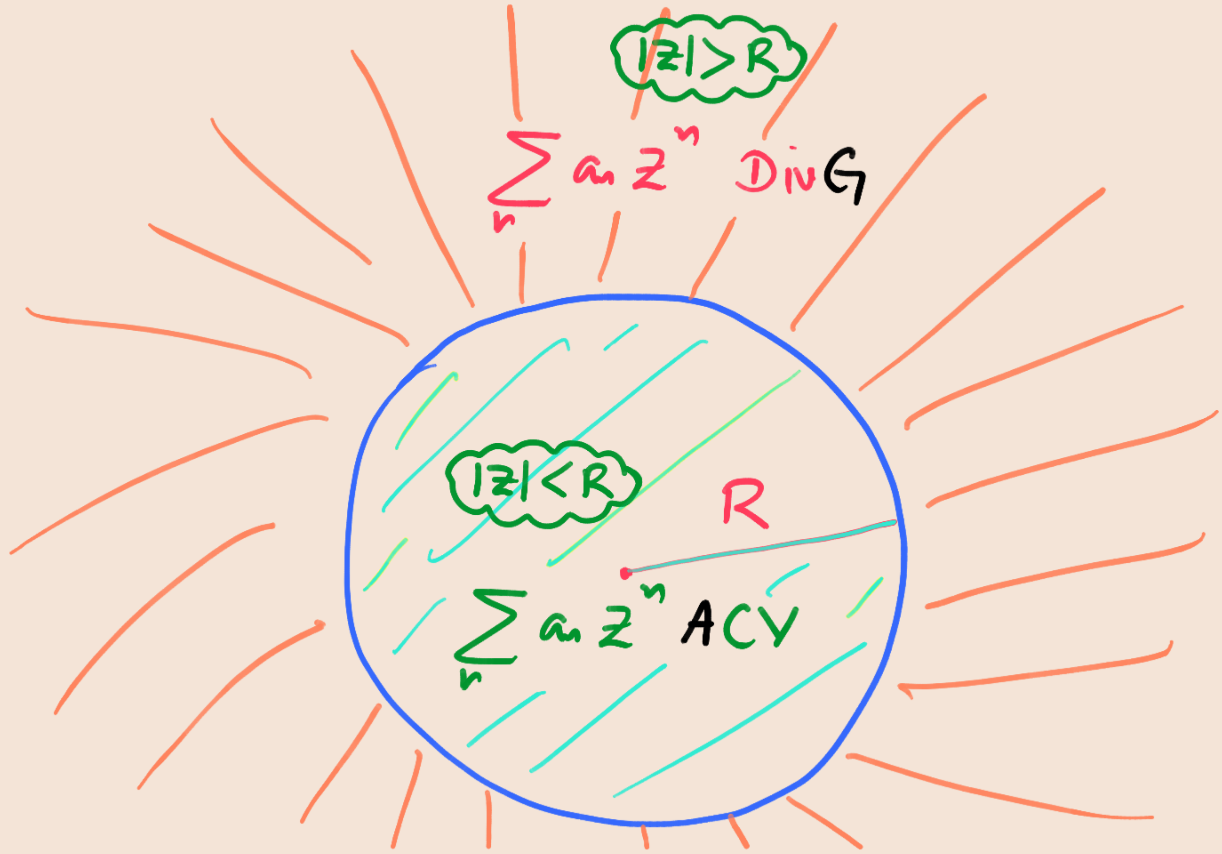
On a :

1) $\forall |z| < R$, $\sum_n a_n z^n$ ACV

2) $\forall |z| > R$, $\sum_n a_n z^n$ DivG

3) Si $|z| = R$, on ne peut rien conclure.

Schéma



Réflexes à avoir

Soit R le RCV de la SE $\sum_n a_n z^n$. On a :

1) $\begin{pmatrix} (a_n \rho^n)_n \text{ bornée} \\ \rho \geq 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow R \geq \rho$

2) $(a_n)_n$ bornée $\Longrightarrow R \geq 1$

3) $\begin{pmatrix} \sum a_n \rho^n \text{ CV} \\ \rho \geqslant 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow R \geqslant \rho$

4) $\begin{pmatrix} \sum a_n \rho^n \text{ Div} \\ \rho \geqslant 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow R \leqslant \rho$

5) $\left(\forall |z| < \rho, \ \sum_n a_n z^n \text{ CV}\right) \Longrightarrow R \geqslant \rho$

6) $\left(\forall |z| > \rho, \ \sum_n a_n z^n \text{ Div}\right) \Longrightarrow R \leqslant \rho$

7) $\begin{pmatrix} \forall |z| < \rho, \ \sum a_n z^n \text{ CV} \\ \forall |z| > \rho, \ \sum a_n z^n \text{ Div} \end{pmatrix} \Longrightarrow R = \rho$

8) $\left(\forall z \in \mathbb{C}, \ \sum a_n z^n \text{ CV}\right) \Longleftrightarrow R = +\infty$

9) $\left(\forall z \in \mathbb{C}^*, \ \sum a_n z^n \text{ Div}\right) \Longleftrightarrow R = 0$

NB :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

f est au moins définie sur $]-R, R[$

Vocabulaire

1) $D(0,R)$ s'appelle le disque ouvert de convergence de la SE $\sum_n a_n z^n$.

2) $]-R,R[$ s'appelle l'intervalle ouvert de convergence de la SE $\sum_n a_n z^n$.

3) Règle pratique de calcul du rayon de convergence

Prop (Critère de D'Alembert pour les SE)

Supposons que $(a_n)_n$ ne s'annule pas.

Soit R le RCV de la SE $\sum_n a_n z^n$.

Notons $l = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. On a :

$$R = \frac{1}{l}$$

Convention : $\frac{1}{+\infty} = 0$ et $\frac{1}{0} = +\infty$

Remarque importante :

Dans le critère de D'Alembert pour les SE, on doit avoir que la suite $(a_n)_n$ ne s'annule pas.

Si ceci n'est pas vérifié, on peut appliquer le critère de D'Alembert à la SATP $\sum_n |a_n z^n|$; voir les exemples ci-après.

Exemple 1 Déterminons le RCV de chacune des SE suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n}}{n+1}$; 2) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} C_{2n}^{n} z^{4n}$

Remarque importante

Des fois D'Alembert n'est pas applicable, que ça soit celui des SE ou celui des SATP.
On peut utiliser par exemple les réflexes vus ci-dessus.
voir l'exemple ci-après.

Exemple Déterminer le rayon de convergence de la SE
$$\sum_{n\geq 1} \sin(n) z^n.$$

4) Comparaison des rayons de convergences

Prop 1 Soient $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ deux SE de rayon de convergences respectifs R_a et R_b.

Si $\left(\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq |b_n|\right)$ Alors $\left(R_a \geq R_b\right)$

Corollaire 2

Soient $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ deux SE de rayon de convergences respectifs R_a et R_b.

1) Si $\left(|a_n| = O(|b_n|)\right)$ Alors $\left(R_a \geq R_b\right)$

2) Si $\left(|a_n| = o(|b_n|)\right)$ Alors $\left(R_a \geq R_b\right)$

3) Si $\left(|a_n| \sim |b_n|\right)$ Alors $\left(R_a = R_b\right)$

5) Rayon de convergence de la série entière dérivée

Déf 1 La série entière dérivée de la SE $\sum_n a_n z^n$ est la SE $\sum_n n a_n z^n$.

Prop 2 : Une SE et sa SE dérivée ont le même RCV.

Corollaire 3

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\sum a_n z^n$ et $\sum n^\alpha a_n z^n$ ont le même ray de conv.

6) Somme et produit de deux SE

a) Somme de deux SE

Ici, $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux SE de RCV respectifs R_a et R_b.

Déf 1 La somme des SE $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est la SE $\sum (a_n+b_n) z^n$.

Prop 2 Notons R_s le RCV de la SE somme $\sum (a_n+b_n)z^n$. On a :

1) $R_s \geqslant \min(R_a, R_b)$

2) $\forall |z| < \min(R_a, R_b)$, $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n+b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$

Prop 3 Si $R_a \neq R_b$ alors $R_S = \min(R_a, R_b)$

b- Produit de cauchy de 2 SE :

Déf 1 : Le produit de Cauchy des SE $\sum_{n\geq 0} a_n t^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n t^n$ et la SE $\sum_{n\geq 0} C_n t^n$ où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad C_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Prop 2 : Soit $z \in \mathbb{C}$.

Le produit de Cauchy des séries complexes $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ et la série complexe $\sum_{n\geq 0} C_n z^n$

où : $C_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

Prop 3 : $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ 2 SE de RCV respectifs R_a et R_b. Soit $\sum_n C_n z^n$ la série entière produit et R_p son RCV

1) $\forall\, |z| < \min(R_a, R_b)$, $\sum_{n\geq 0} C_n z^n$ ACV

et on a $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$

2) $R_p \geq \min(R_a, R_b)$

II) Propriété de la fct somme d'une SE :

Dans tout le paragraphe et sauf mention contraire, $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ sera une SE et $R>0$ son RCV.

$f : z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ sera sa somme.

1) Continuité :

Prop 1 :

La série de fcts $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ CN sur tout disque fermé $D(0,r)$ où $r<R$.

Prop 2 :

$f : z \longrightarrow \sum_{0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur $D(0,R)$

Corollaire 3

La fct $x \in \mathbb{R} \longrightarrow \sum_{0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur $]-R, R[$

2) Intégration terme à terme d'une SE :

Prop 1 :

Soit $R>0$ le RCV de la SE $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$. On a :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^x a_n t^n \, dt \right)$$

« intégration terme à terme d'une SE »

3) Dérivation terme à terme dans une SE

Prop 1 : $R>0$ le RCV de la SE $\sum_n a_n z^n$

La somme $f : x \longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞

sur $]-R,R[$ et on a :

$$\forall x \in]-R,R[, \forall k \in \mathbb{N} \quad f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_n x^n\right)^{(k)}$$

Résumé

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall x \in]-R,R[, \ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \ ; \ f \in C^\infty(]-R,R[,\mathbb{K}) \\ \forall x \in]-R,R[, \forall k \in \mathbb{N}, \ f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n x^n)^{(k)} \end{array}}$$

Corollaire 2

1) $\forall k \in \mathbb{N}, \ \forall x \in]-R,R[, \ \dfrac{f^{(k)}(x)}{k!} = \sum_{n=k}^{+\infty} C_n^k \, a_n \, x^{n-k}$

2) $\forall k \in \mathbb{N}, \ a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$

Prop 3 : Soient $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ 2 SE de RCV respectifs R_a et R_b et de sommes f et g.

1) Si $f=0$ au voisinage de 0, alors $(\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 0)$

2) Si $f=g$ au voisinage de 0, alors $(\forall n \in \mathbb{N}, a_n = b_n)$

$$\text{Si : } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x>0}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \text{ alors } (\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = b_n)$$

$$\text{Si : } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x>0}{=} 0 \text{ alors } (\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 0)$$

Résumé

A retenir Si f la somme de la SE $\sum a_n x^n$ de RCV $R>0$, on a : $\left(\forall x \in]-R,R[\ ; \ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n\right)$

Vocab Soit f de C^∞ sur l'intervalle $]-r,r[$ où $(r>0)$

La série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ s'appelle la série de Taylor de la fct f.

III. Fonctions développables en série entière :

1/ Définitions :

Def 1 : Soit $r>0$: la fct f est dite développable en série entière (DSE) sur $]-r,r[$ si et ssi il existe une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ telle que

$$\forall x \in]-r,r[\ , \ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Déf 2 : f est dite développable en série entière en 0 (ou au voisinage de 0) si et ssi il existe $r>0$ tq que f soit DSE sur $]-r,r[$.

Vocab : L'expression " $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ " s'appelle "Le developpement en serie entière" de f. Noté aussi DSE.

2) Propriétés

Prop 1 : Soit $r>0$

1) La combinaison Linéaire de 2 fcts DSE sur $]-r,r[$ est une fct DSE sur $]-r,r[$

2) Le produit de 2 fcts DSE sur $]-r,r[$ est une fct DSE sur $]-r,r[$

On a précisément :

$$\text{Si } \begin{pmatrix} \forall x\in]-r,r[\ ,\ f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ \forall x\in]-r,r[\ ,\ g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \end{pmatrix}$$

$$\text{Alors } \begin{pmatrix} 1/\ \forall x\in]-r,r[\ ,\ \alpha f(x)+\beta g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha a_n+\beta b_n)x^n \\ 2/\ \forall x\in]-r,r[\ ,\ f(x)\cdot g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \\ \text{où } \quad c_n=\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \end{pmatrix}$$

Corollaire 02 :

1/ La Combin lin de 2 fcts DSE en 0 est une fct DSE en 0

2/ Le produit de 2 fcts DSE en 0 est une fct DSE en 0.

Prop3 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ et $r > 0$.

Supp que f est DSE sur $]-r, r[$ et que

$$\forall x \in]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

1) $Re(f)$ et $Im(f)$ sont DSE sur $]-r, r[$ et que

2) $$\begin{cases} \forall x \in]-r, r[, & Re(f(x)) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} Re(a_n) x^n \\ \forall x \in]-r, r[, & Im(f(x)) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} Im(a_n) x^n \end{cases}$$

Prop4

(Intégration et dérivation terme à terme d'une fct DSE)

Soit $r > 0$ et soit f une fct DSE sur $]-r, r[$ avec

$$\forall t \in]-r, r[, \quad f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$$

1/ $\forall x \in]-r, r[, \quad \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^x a_n t^n \, dt \right)$

2/ f' est aussi DSE sur $]-r, r[$, et on a :

$$\forall x \in]-r, r[, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

3/ $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}$ est DSE sur $]-r, r[$, et on a :

$$\forall x \in]-r, r[, \quad f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n k! C_n^k x^{n-k}$$

Prop

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

La fonction $x \longmapsto (1+x)^{\alpha}$ est DSE sur $]-1,1[$ et on a :

$$\forall x \in]-1,1[\,,\ (1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k) \right) \frac{x^n}{n!}$$

DSE usuels (À retenir !)

$$\forall x \in]-1,1[\,,\ \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

$$\forall x \in]-1,1[\,,\ -\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \qquad \frac{1}{1+x} = \sum (-1)^n x^n$$

$$\forall x \in]-1,1[\,,\ \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n \pm 1} \frac{x^n}{n}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \,,\ e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \,,\ \mathrm{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; \mathrm{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\forall x \in]-1,1[, \; \arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\forall x \in]-1,1[, \; \mathrm{argth}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\forall x \in]-1,1[, \; (1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k) \right) \frac{x^n}{n!}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Fin