d) Conclusion :

On a ainsi : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |v_n| \leq \varepsilon$

ce qui traduit le fait que : $\lim_n v_n = 0$

5°) Posons : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = (-1)^n_n$.

alors : $\forall n \geq 1, v_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k . 1^{n-k} = \frac{1}{2^n} \times (-1+1)^n = 0$

d'où $\lim_n v_n = 0$.

Mais on n'a pas que $\lim_n U_n = 0$; la suite (U_n) n'a même pas de limite !

Problème 2

Partie I

1°) $f^m \circ f^n = f^{m+n}$

2) Supposons que (U_n) converge, et m.q. (U_n) est de Cauchy.

Soit $\varepsilon > 0$.

Pour $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, et puisque (U_n) converge (soit l sa limite), alors :

$\exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, |U_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

d'où pour tout $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \geq N$ et $q \geq N$, on a :

$$|U_p - U_q| = |U_p - l + l - U_q| \leq \underbrace{|U_p - l|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|U_q - l|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} \leq \varepsilon$$

Enfin : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \geq N, \forall q \geq N$, on a $|U_p - U_q| \leq \varepsilon$

3) $H_{2n} - H_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$

d'autre part, $\forall n+1 \leq k \leq 2n$, on a $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}$

$$\Rightarrow \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} \times n = \frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$$

4) On a (H_n) suite de Cauchy $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \geq N, \forall q \geq N, |H_p - H_q| \leq \varepsilon$

Passons à la négation :

(H_n) n'est pas de Cauchy $\Leftrightarrow (\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists p \geq N, \exists q \geq N / |H_p - H_q| > \varepsilon$

Il existe $\varepsilon > 0$ qui est $\varepsilon = \frac{1}{4}$, ce $\varepsilon = \frac{1}{4}$, vérifie :

$\forall N \in \mathbb{N}$, il existe $p \geq N$ (qui est $p = 2N$) et $q \geq N$ (qui est $q = N$)

tels que l'on a : $|H_p - H_q| = |H_{2N} - H_N| \geq \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$.

D'où (H_n) n'est pas une suite de Cauchy.

5) Supp. que (H_n) converge. Notons l sa limite.

alors $\lim_n H_{2n} = \lim_n H_n = l$

$3°) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$

Par passage à la limite, on trouve $0 \geq \frac{1}{2}$

ce qui est absurde, D'où (H_n) diverge.

6/a°) $H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} > 0$, donc (H_n) est croissante (même stricte)

b°) (H_n) est une suite croissante, donc soit que (H_n) converge (si elle est majorée) soit que $\lim_{n \to +\infty} H_n = +\infty$ (sinon)

et puisque (H_n) diverge, alors $\lim_n H_n = +\infty$.

7/a°) Notons $g(x) = x - \ln(1+x)$, pour tout $x \in I =]-1, +\infty[$

g est bien dérivable sur I et que l'on a :

$\forall x \in I,\ g'(x) = \frac{x}{1+x}$;

$g'(x)$ est du même signe que celui de x, puisque $1+x > 0$

Tableau de variations de g :

x	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
g	$\searrow$	0	$\nearrow$

D'après le tab. de variations de g,
On a : $\forall x \in]-1, +\infty[$, $g(x) \geqslant 0$
C.à.d : $\forall x > -1$, $x \geqslant \ln(1+x)$

b°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$; d'après a°/

D'autre parts $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\ln(k+1) - \ln k\right) = \ln(n+1)$, (Somme telescopique)

D'où $H_n \geqslant \ln(n+1)$.

c°/ $\forall n$, $H_n \geqslant \ln(n+1)$, et puis que $\lim_n \ln(n+1) = +\infty$; alors $\lim_n H_n = +\infty$.

Partie II

1/a°/ Soit $x \in \mathbb{R}$,
Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^n(x+1) = f^n(x) + 1$

Initialisation : Pour $n = 0$; Soit $x \in \mathbb{R}$.
On a $f^0(x+1) = x+1$, car $f^0 = I_{\mathbb{R}}$.
et on a $f^0(x) + 1 = x + 1$, d'où $f^0(x+1) = f^0(x) + 1$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supp. que $f^n(x'+1) = f^n(x') + 1$, $\forall x' \in \mathbb{R}$

On a $f^{n+1}(x+1) = f(f^n(x+1))$ $(f \circ f^n = f^{n+1})$

$= f(f^n(x) + 1)$ (Hypothèse de récurrence)

$= f(f^n(x)) + 1$ (la définition de f)

$= f^{n+1}(x) + 1$ $(f \circ f^n = f^{n+1})$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^n(x+1) = f^n(x) + 1$

et ceci est vrai, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b°) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:
Pour $n = 0$: $f^0 = I_{\mathbb{R}}$ qui est bien strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, Supp. que f^n strict. ↗.
M. que f^{n+1} strict. ↗.
$f^{n+1} = f^n \circ f$ est composée de deux application strict. ↗
donc f^{n+1} est strict. ↗ sur $\mathbb{R}$

C/C : $\forall n \in \mathbb{N}$, f^n strict. ↗ sur $\mathbb{R}$

---

c/1°/ $x \leq y < x+1 \Rightarrow f^n(x) \leq f^n(y) < f^n(x+1)$ (f^n stric. ↗)

$\Rightarrow f^n(x) \leq f^n(y) < f^n(x)+1$ (1/a°)

$\Rightarrow 0 \leq f^n(y) - f^n(x) < 1$

---

c/2°/ On a $\begin{cases} -1 < x - y \leq 0 & (\text{car } x \leq y < x+1) \\ 0 \leq f^n(y) - f^n(x) < 1 \end{cases}$

D'où par sommation on a : $-1 < \underbrace{f^n(y) - y} - \underbrace{(f^n(x) - x)} < 1$

$$\Rightarrow -\frac{1}{n} < \underbrace{\frac{f^n(y)-y}{n}}_{= U_n(y)} - \underbrace{\frac{(f^n(x)-x)}{n}}_{= U_n(x)} < \frac{1}{n} \quad \left(\text{car } n \geq 1\right)$$

$$\Rightarrow |U_n(y) - U_n(x)| < \frac{1}{n}$$

2/a°/ Soit $n \in \mathbb{N}$, Soit $x \in \mathbb{R}$, Soit $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$f^n(x+k) - f^n(x) = \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} \left(\underbrace{f^n(x+j+1) - f^n(x+j)}_{= 1, \text{ d'après } 1/a°} \right)}_{\text{somme telescopique}}$$

$$\Rightarrow f^n(x+k) - f^n(x) = \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} 1}_{= k} \quad (\text{d'après } 1°/a°)$$

---

b°) Soit $n \in \mathbb{N}$, Soit $x \in \mathbb{R}$, Soit $k \in \mathbb{Z}^-$, on a :

$$f^n(x+k) - f^n(x) = f^n(x+k) - f^n\big((x+k)+(-k)\big)$$

$$= -\underbrace{\Big(f^n\big((x+k)+\underbrace{(-k)}_{\in\mathbb{N}}\big) - f^n(x+k)\Big)}_{=(-k)}$$

$$\underset{2°/a°/}{\overset{\text{d'après}}{=}} -(-k) \quad \big(\text{car } (-k)\in\mathbb{N}\big)$$

$$= k$$

c/ Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\underbrace{E(y-x)}_{=k\in\mathbb{Z}} \leq y-x < \underbrace{E(y-x)}_{=k\in\mathbb{Z}}+1$

Notons $k=E(y-x)$, on a $\begin{cases} k\in\mathbb{Z} \\ \text{et} \\ x\leq y-k<x+1\end{cases}$

d) Soit $n\geq 1$, Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a l'existence de $k\in\mathbb{Z}$ tel que:

$$x\leq y-k<x+1$$

et d'après 1) c) 2°), on tire que: $|U_n(y-k)-U_n(x)|<\frac{1}{n}$

D'autre part, on a: $U_n(y-k)=\frac{1}{n}\Big(\underbrace{f^n(y-k)}_{\shortparallel} - (y-k)\Big)$ (définition de U_n)

$$=\frac{1}{n}\big(f^n(y)+(-k)-(y-k)\big)$$

Car $f^n(y-k)-f^n(y)=-k$, selon 2/b°/

$$\Rightarrow U_n(y-k)=\frac{1}{n}\big(f^n(y)-y\big) \overset{\text{déf}}{=} U_n(y)$$

D'où $|U_n(y)-U_n(x)|<\frac{1}{n}$.

3) a°) $\frac{1}{k}\cdot\sum_{j=0}^{k-1}U_n\big(f^{jn}(x)\big) = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\left(\frac{1}{n}\Big(f^n\big(f^{jn}(x)\big)-f^{jn}(x)\Big)\right)$

$$=\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{k-1}\big(f^{n+jn}(x)-f^{jn}(x)\big) = \frac{1}{kn}\sum_{j=0}^{k-1}\big(f^{(j+1)n}(x)-f^{jn}(x)\big)$$

$$= \frac{1}{kn}\left(f^{kn}(x) - f^{0}(x)\right) \quad (\text{Somme telescopique})$$

$$= \frac{1}{kn}\left(f^{kn}(x) - x\right) \quad \left(f^{0} = I_{\mathbb{R}}\right)$$

$$= u_{kn}(x).$$

b°) $$|U_{kn}(x) - U_n(x)| = \left| \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} U_n\left(f^{in}(x)\right) - \frac{1}{k}\cdot\sum_{i=0}^{k-1} U_n(x) \right|$$

$$= \frac{1}{k}\left| \sum_{i=0}^{k-1}\left(U_n\left(f^{in}(x)\right) - U_n(x)\right)\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{k}\cdot\sum_{i=0}^{k-1} \underbrace{\left|U_n\left(f^{in}(x)\right) - U_n(x)\right|}_{<\frac{1}{n},\ \text{d'après d/}} \quad \left(\text{inégalité triangulaire}\right)$$

$$< \frac{1}{k}\cdot\underbrace{\left(\sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{n}\right)}_{=\frac{1}{n}\times k}$$

D'où $$|U_{kn}(x) - U_n(x)| < \frac{1}{n}.$$

4°) Soit $x \in \mathbb{R}$, Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$|U_p(x) - U_q(x)| \leqslant \underbrace{|U_p(x) - U_{pq}(x)|}_{<\frac{1}{p}} + \underbrace{|U_{pq}(x) - U_q(x)|}_{<\frac{1}{q}} \quad \left(\text{inég. triangul.}\right)$$

$$< \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \quad (\text{d'après } 3/b°/)$$

5) a°) Soit $x \in \mathbb{R}$, Mq que $(U_n(x))_n$ est une suite de Cauchy.

Soit $\varepsilon > 0$:.

pour $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ et puisque $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$

tel que : $\forall n \geq n_0, \; \frac{1}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$

D'où, $\forall p \geq n_0 \; \forall q \geq n_0 \; \frac{1}{p} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et $\frac{1}{q} \leq \frac{\varepsilon}{2}$, et donc $\boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq \varepsilon}$

Ainsi, $\forall p \geq n_0 \; \forall q \geq n_0, \; |U_p(x) - U_q(x)| \underbrace{\leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q}}_{\text{d'après } 4°} \leq \varepsilon$

En Conclusion : $\forall \varepsilon > 0, \; \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \; \forall p \geq n_0 \; \forall q \geq n_0 \; |U_p(x) - U_q(x)| \leq \varepsilon$

D'où $(U_n(x))_n$ est une suite de Cauchy

5°/b°/ L'application α est Constante; en effet :

Soient $x, y \in \mathbb{R}$, montrons donc que $\alpha(x) = \alpha(y)$:

D'après 2°/d°/, $\forall n \geq 1, \; |U_n(x) - U_n(y)| \leq \frac{1}{n}$

Par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$, on aura :

$$\Big| \underbrace{\lim_{n \to +\infty} U_n(x)}_{= \alpha(x)} - \underbrace{\lim_{n \to +\infty} U_n(y)}_{= \alpha(y)} \Big| \leq \underbrace{\left(\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\right)}_{= 0}$$

D'où $|\alpha(x) - \alpha(y)| \leq 0$

càd $\alpha(x) = \alpha(y)$.

5°) Notons $C = \alpha(0)$ (par exemple)

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, \; \lim_{n \to +\infty} U_n(x) \underset{\text{définition de } \alpha(x)}{\overset{\text{par}}{=}} \alpha(x) = \alpha(0) = C$

Car α est une application Constante.

Fin et bon Courage !