Problème : (Noyaux et images itérés, problème détaillé)
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Soit u un endomorphisme de E.
Pour tout entier naturel p, on notera $I_p = \operatorname{Im}\left(u^p\right)$ *et* $K_p = \ker\left(u^p\right)$.

1) Enoncer le théorème du rang.
2) Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E tels que $F \subset G$.
   Compléter : $\dim(F) = \dim(G) \Leftrightarrow \ldots$
3) Soit $p \in \mathbb{N}$, montrer que :
   A) $K_p \subset K_{p+1}$.
   B) $I_{p+1} \subset I_p$
   Indication : $u^{p+1} = u^p o u = u o u^p$.
   C) Que dire de $K_p \; et \; K_{p+n}$ d'une part, et de $I_p \; et \; I_{p+n}$ d'autre part.
   (sans justification)
4) On suppose que E est de dimension finie et u injectif.
   A) u^p est-il surjectif ? injectif ?
   B) Expliciter alors K_p *et* I_p.
5) On suppose que E est de dimension finie n non nulle, et que u est non injectif.
   a) Montrer, en introduisant les dimensions, qu'il est impossible d'avoir :
   $\forall p \in \mathbb{N}, \; K_p \subset K_{p+1} \; et \; K_p \neq K_{p+1}$

Il existe alors un entier p tel que $K_p = K_{p+1}$. Notons r le plus petit de ces entiers. Notons encore $n_p = \dim(K_p)$ *pour tout* $p \in \mathbb{N}$.

   b) Combien vaut n_0 ? (on rappelle la convention $u^0 = I_E$)
   c) Comparer pour tout $p \in [\![0, r-1]\!]$, n_p *avec* n_{p+1}. ($\prec$ *ou* $\succ$?)
   d) Si $m, n \in \mathbb{N}$, compléter : $m \prec n \Leftrightarrow m + \ldots \leq n$
   e) En déduire de ce qui précède que $r \leq n$.
   f) Rappelons que $K_r = K_{r+1}$. Montrer que $I_r = I_{r+1}$.
   (vous pouvez utiliser 1) et 2))
   g) Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}, K_r = K_{r+p}$.
   Indication : Récurrence sur p, puis $u^{r+p+1} = u^{r+1} o \; u^p$ et enfin $K_r = K_{r+1}$.
   Alors soyez précis !
   h) En déduire que $\forall p \in \mathbb{N}, I_r = I_{r+p}$.
   i) Montrer que $K_r \cap I_r = \{0\}$.
   j) En déduire que $E = K_r \oplus I_r$.

   Indications : (j n'est pas ici $e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Utiliser le théorème du rang)