

Épreuve de Mathématiques
(toutes filières)

Lundi 18 mai 2009 de 14h00 à 18h00

EXTRAIT

Problème II : Analyse

Dans tout ce problème, on notera sh la fonction sinus hyperbolique, ch la fonction cosinus hyperbolique et th la fonction tangente hyperbolique.

A. Etude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x \operatorname{sh} \left(\frac{1}{x} \right)$.

1. Etudier la parité de f .
2. (a) Rappeler un équivalent de la fonction sh en 0 et en déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
(b) Déterminer la limite de f en 0.
3. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = \left[\operatorname{th} \left(\frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x} \right] \times \operatorname{ch} \left(\frac{1}{x} \right).$$

4. Montrer que, pour tout $X \in \mathbb{R}_+^*$, $\operatorname{th}(X) < X$.
5. En déduire le tableau de variations de f .
6. Donner le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $X \mapsto \frac{\operatorname{sh}(X)}{X}$.
7. En déduire qu'au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$, f admet un développement de la forme

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \frac{a_4}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right),$$

où $a_0, \dots, a_4$ sont cinq réels que l'on précisera.

8. Montrer que la fonction $x \in \mathbb{R}^* \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathbb{R}$ se prolonge sur $\mathbb{R}$ en une fonction continue notée F , puis prouver que F est dérivable sur $\mathbb{R}$.

C. Une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) suivante, que l'on va résoudre sur différents intervalles

$$xy' + y = \operatorname{ch}(x). \quad (E)$$

- 12. Résoudre sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle (E).
- 13. Donner sans justification les solutions de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $\mathbb{R}_-^*$.
- 14. Justifier que la fonction F (définie dans la question A.8.) est l'unique fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ qui soit solution de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$.

D. Etude d'une suite

15. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation

$$f(x) = \frac{n+1}{n}$$

admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$. On la note u_n .

On définit ainsi une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ que l'on va étudier dans les questions qui suivent.

- 16. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
- 17. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
- 18. En utilisant la question A.7., déterminer un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.

E. Une fonction définie par une intégrale

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $J(x) = \int_{x/2}^x f(t) dt$.

- 19. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sh}(2x) = 2 \operatorname{ch}(x) \operatorname{sh}(x)$.
- 20. Justifier que J est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$J'(x) = f(x) \left[1 - \frac{1}{2} \operatorname{ch} \left(\frac{1}{x} \right) \right].$$

- 21. En déduire le signe de J' sur $\mathbb{R}_+^*$; on exprimera le (ou les) zéro(s) de J' à l'aide de la fonction $\ln$.
- 22. On admet les résultats suivants :
 - (*) $\lim_{x \rightarrow 0^+} J(x) = +\infty$,
 - (*) $\lim_{x \rightarrow +\infty} J(x) = +\infty$ et J admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote d'équation $y = \frac{x}{2}$,
 - (*) la courbe représentative de J est toujours "au dessus" de l'asymptote précédente.

Donner le tableau de variations de J sur $\mathbb{R}_+^*$.

23. Tracer l'allure de la courbe représentative de J .

On donne pour le tracé : $\frac{1}{\ln(2 + \sqrt{3})} \approx 0,76$ et $J\left(\frac{1}{\ln(2 + \sqrt{3})}\right) \approx 0,65$ à 10^{-2} près.

FIN

