

**ECOLE POLYTECHNIQUE
ECOLE NORMALES SUPERIEURES**

CONCOURS D'ADMISSION 2024

**LUNDI 15 AVRIL 2024
08h00 - 12h00**

FILIERES MP-MPI - Epreuve n° 1

MATHEMATIQUES A (XLSR)

Extrait pour les

premières années

Durée : 4 heures

***L'utilisation des calculatrices n'est pas
autorisée pour cette épreuve***

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Le problème comporte deux parties qui sont indépendantes.

Notations

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls.

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de $\{1, \dots, n\}$ et $\varepsilon(\sigma)$ la signature d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on appelle *point fixe* de σ un élément $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\sigma(i) = i$. On note $\nu(\sigma)$ le nombre de points fixes de σ . On appelle *dérangement* une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ n'ayant aucun point fixe. On note $\mathfrak{D}_n$ l'ensemble des dérangements de $\mathfrak{S}_n$ et D_n son cardinal.

Si k est un entier naturel tel que $k \leq n$, on note $\binom{n}{k}$ le coefficient binomial correspondant au nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments. Par convention, on pose $\binom{n}{k} = 0$ pour un entier naturel $k > n$.

On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à une indéterminée et à coefficients réels. Si de plus $n \geq 0$ est un entier naturel, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des éléments $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n .

Si $n \geq 0$ et $d \geq 1$ sont deux entiers naturels, on note $d \mid n$ la relation « d divise n ».

Si x est un réel, on note $E(x)$ sa partie entière, c'est-à-dire l'unique entier $E(x)$ tel que $E(x) \leq x < E(x) + 1$.

Si p est un nombre premier et n un entier naturel non nul, on note

$$\nu_p(n) = \max\{\nu \in \mathbb{N} : p^\nu \mid n\}.$$

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels.

Pour tout ensemble E , on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E .

On note $\ln_2$ la fonction de $]1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\ln_2(x) = \ln(\ln(x))$.

Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ désigne une suite de nombres réels, on note, pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n \leq x} a_n = \sum_{n=1}^{E(x)} a_n, \quad \sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ premier}}} a_p = \sum_{\substack{p=1 \\ p \text{ premier}}}^{E(x)} a_p, \quad \prod_{\substack{p \leq x \\ p \text{ premier}}} a_p = \prod_{\substack{p=1 \\ p \text{ premier}}}^{E(x)} a_p$$

avec la convention que la somme indexée par l'ensemble vide vaut 0 et le produit indexé par l'ensemble vide vaut 1.

On pourra utiliser sans démonstration le fait qu'il existe un réel γ tel que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Première partie

Soit un entier naturel $n \geq 2$. Pour tout nombre réel x , on considère la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ suivante

$$M_x = \begin{pmatrix} x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & x & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & x & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & x \end{pmatrix}.$$

On admet que : $\forall x \in \mathbb{R}, \det(xI_n + M_0) = (x-1)^{n-1}(x+n-1)$

1b. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x^{\nu(\sigma)} = (x-1)^{n-1}(x+n-1).$$

2. Calculer

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma), \quad \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \nu(\sigma) \quad \text{et} \quad \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \frac{\varepsilon(\sigma)}{\nu(\sigma) + 1}.$$

3. Établir que

$$\text{Card}\{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \varepsilon(\sigma) = 1\} = \text{Card}\{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \varepsilon(\sigma) = -1\}$$

4. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, préciser à quelle condition sur $\nu(\sigma)$, on a $\sigma \in \mathfrak{D}_n$. En déduire que

$$\text{Card}\{\sigma \in \mathfrak{D}_n : \varepsilon(\sigma) = 1\} = \text{Card}\{\sigma \in \mathfrak{D}_n : \varepsilon(\sigma) = -1\} + (-1)^{n-1}(n-1).$$

Soit $m \in \mathbb{N}$. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \begin{pmatrix} m-1 \\ 0 \end{pmatrix} & & & & \begin{pmatrix} m-1 \\ m-1 \end{pmatrix} & 0 \\ \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \begin{pmatrix} m \\ m \end{pmatrix} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m+1}(\mathbb{R}).$$

5a. Justifier que les familles $(1, X, \dots, X^m)$ et $(1, (X-1), \dots, (X-1)^m)$ sont des bases de $\mathbb{R}_m[X]$.

5b. Montrer que la transposée de M est la matrice de l'application linéaire identité

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_m[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_m[X] \\ P & \longmapsto & P \end{array}$$

dans les bases $(1, X, \dots, X^m)$ au départ et $(1, (X-1), \dots, (X-1)^m)$ à l'arrivée.

5c. Établir que M est inversible et expliciter son inverse.

5d. En déduire que pour tous $(u_0, \dots, u_m), (v_0, \dots, v_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$,

$$\text{si } \forall k \leq m, \quad u_k = \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} v_\ell, \quad \text{alors } \forall k \leq m, \quad v_k = \sum_{\ell=0}^k (-1)^{k-\ell} \binom{k}{\ell} u_\ell.$$

Fin de l'extrait

CORRECTION

Soit un entier naturel $n \geq 2$. Pour tout nombre réel x , on considère la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ suivante

$$M_x = \begin{pmatrix} x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & x & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & x & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & x \end{pmatrix}.$$

On admet que : $\forall x \in \mathbb{R}, \det(xI_n + M_0) = (x-1)^{n-1}(x+n-1)$

1b. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x^{\nu(\sigma)} = (x-1)^{n-1}(x+n-1).$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a $\det(xI_n + M_0) = (x-1)^{n-1}(x+n-1)$. (Ω₁)

D'autre part :

$$xI_n + M_0 = M_x = \begin{pmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & x \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \det(xI_n + M_0) &= \det(M_x) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n (M_x)_{\sigma(i) i} \end{aligned}$$

et on a : $(M_x)_{ij} = \begin{cases} x & \text{si } i=j \\ 1 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Alors pour chaque $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a :

$$\prod_{i=1}^n (M_x)_{\sigma(i) i} = \left(\prod_{\substack{i=1 \\ \sigma(i)=i}}^n \overbrace{(M_x)_{\sigma(i) i}}^{=x} \right) \times \left(\prod_{\substack{i=1 \\ \sigma(i) \neq i}}^n \overbrace{(M_x)_{\sigma(i) i}}^{=1} \right)$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \prod_{i=1}^n (M_\lambda)_{\sigma(i) i} &= \prod_{\substack{i=1 \\ \sigma(i)=i}}^n \lambda \\
 &= \lambda^{\text{card}(\{i \in \llbracket 1, n \rrbracket : \sigma(i)=i\})} \\
 &= \lambda^{\nu(\sigma)}
 \end{aligned}$$

Alin 1 :

$$\begin{aligned}
 \det(\lambda I_n + M_\sigma) &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n (M_\lambda)_{\sigma(i) i} \\
 &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \lambda^{\nu(\sigma)} \quad (\Omega_2)
 \end{aligned}$$

$$(\Omega_1) \text{ et } (\Omega_2) \Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}, \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \lambda^{\nu(\sigma)} = (\lambda-1)^{n-1} (\lambda+n-1)$$



1b. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x^{\nu(\sigma)} = (x-1)^{n-1} (x+n-1).$$

2. Calculer

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma),$$

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \nu(\sigma) \quad \text{et}$$

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \frac{\varepsilon(\sigma)}{\nu(\sigma)+1}.$$

2) i) $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) = ?$

On a: $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x^{\nu(\sigma)} = (x-1)^{n-1} (x+n-1)$

Prendons $x=1$, on aura :

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) &= 0^{n-1} \times n \\ &= 0, \text{ car } n-1 > 1 \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) = 0$$

□

2) ii) $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \nu(\sigma) = ?$

On a: $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x^{\nu(\sigma)} = (x-1)^{n-1} (x+n-1)$

Pensons à dériver, puis on remplace x par 1.

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^*, \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \nu(\sigma) x^{\nu(\sigma)-1} = (n-1)(x-1)^{n-2} (x+n-1) + (x-1)^{n-1}$$

« On a pris $\mathbb{R}^*$ pour que $x^{\nu(\sigma)-1}$ soit défini si $\nu(\sigma)=0$ »

$$x=1 \Rightarrow \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \sqrt[\sigma]{\sigma} = (n-1) \cdot 0^{n-2} \cdot n + \underbrace{0^{n-1}}_{\rightarrow=0, \text{ car } n-1 \geq 1 \text{ (} n \geq 2 \text{)}}$$

$$\text{On a } \begin{cases} 0^{n-2} = 0 \text{ si } n-2 \geq 1; \text{ c\`ad } n \geq 3 \\ 0^{n-2} = 1 \text{ si } n-2 = 0; \text{ c\`ad } n = 2 \end{cases}$$

Donc fin,

$$\boxed{\begin{aligned} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \sqrt[\sigma]{\sigma} &= 0 \text{ si } n \geq 3 \\ \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \sqrt[\sigma]{\sigma} &= 2 \text{ si } n = 2 \end{aligned}}$$



$$2) \text{ iii) } \sum_{\sigma \in S_n} \frac{\varepsilon(\sigma)}{\sqrt[\sigma]{\sigma} + 1} = ?$$

$$\text{On a : } \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) x^{\sqrt[\sigma]{\sigma}} = (x-1)^{n-1} (x+n-1)$$

Passons à introduire l'intégrale $\int_0^1$. On a :

$$\int_0^1 \left(\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) x^{\sqrt[\sigma]{\sigma}} \right) dx = \int_0^1 (x-1)^{n-1} (x+n-1) dx$$

$$\Rightarrow \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \cdot \underbrace{\left(\int_0^1 x^{\sqrt[\sigma]{\sigma}} dx \right)}_{\rightarrow = \left[\frac{x^{\sqrt[\sigma]{\sigma}+1}}{\sqrt[\sigma]{\sigma}+1} \right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt[\sigma]{\sigma}+1}} = \int_0^1 \left(n(x-1)^{n-1} + (x-1)^n \right) dx$$

$$\rightarrow = \left[\frac{x^{\sqrt[\sigma]{\sigma}+1}}{\sqrt[\sigma]{\sigma}+1} \right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt[\sigma]{\sigma}+1}$$

$$\Rightarrow \sum_{\sigma \in S_n} \frac{\varepsilon(\sigma)}{j(\sigma)+1} = \left[(-1)^n + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$$

$$\rightarrow = - \left((-1)^n + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \right) = \frac{(-1)^{n+1} n}{n+1}$$

On fin :

$$\sum_{\sigma \in S_n} \frac{\varepsilon(\sigma)}{j(\sigma)+1} = \frac{(-1)^{n+1} n}{n+1}$$



1b. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x^{\nu(\sigma)} = (x-1)^{n-1} (x+n-1).$$

2. Calculer

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma), \quad \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \nu(\sigma) \quad \text{et} \quad \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \frac{\varepsilon(\sigma)}{\nu(\sigma)+1}.$$

3. Établir que

$$\text{Card}\{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \varepsilon(\sigma) = 1\} = \text{Card}\{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \varepsilon(\sigma) = -1\}$$

Méthode 1

$$\text{On a : } \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \varepsilon(\sigma)=1}} \underbrace{\varepsilon(\sigma)}_{=1} + \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \varepsilon(\sigma)=-1}} \underbrace{\varepsilon(\sigma)}_{=-1} = 0, \text{ car } (\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \varepsilon(\sigma) = \pm 1)$$

$$\Rightarrow \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \varepsilon(\sigma)=1}} 1 - \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \varepsilon(\sigma)=-1}} 1 = 0$$

$\searrow = \text{Card}(\{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \varepsilon(\sigma)=1\})$ $\searrow = \text{Card}(\{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \varepsilon(\sigma)=-1\})$

d'où :

$$\text{Card}(\{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \varepsilon(\sigma)=1\}) = \text{Card}(\{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \varepsilon(\sigma)=-1\})$$



Méthode 2 (Directe ; indépendamment du problème)

Notons $P = \{\sigma \in S_n / \varepsilon(\sigma) = 1\}$ et $I = \{\sigma \in S_n / \varepsilon(\sigma) = -1\}$

Montrons que $\text{Card}(P) = \text{Card}(I)$.

Soit τ une transposition (fixée). On rappelle que $\varepsilon(\tau) = -1$.

Considérons l'application :

$$\begin{array}{ccc} \phi: P & \longrightarrow & I \\ \sigma & \longmapsto & \phi(\sigma) = \tau \circ \sigma \end{array}$$

On montrera que ϕ est bijective, puis on tire que $\text{Card}(P) = \text{Card}(I)$.

$\leadsto \phi$ bijective ?

Soit $\sigma \in I$ (arrivée).

Soit $s \in P$ (départ). On a :

$$\phi(s) = \sigma \Leftrightarrow \tau \circ s = \sigma$$

$$\Leftrightarrow s = \tau^{-1} \circ \sigma$$

$$\phi(s) = \sigma \Leftrightarrow s = \tau \circ \sigma \quad (\tau^{-1} = \tau)$$

Et on a $\tau \circ \sigma \in P$ puisque $\varepsilon(\tau \circ \sigma) = \underbrace{\varepsilon(\tau)}_{=-1} \times \underbrace{\varepsilon(\sigma)}_{=-1} = 1$
Car $\sigma \in I$

D'où : $\forall \sigma \in I, \exists ! s \in P, \phi(s) = \sigma$

C'est ϕ est une bijection de P vers I

Par suite $\text{Card}(P) = \text{Card}(I)$.

□

4. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, préciser à quelle condition sur $\nu(\sigma)$, on a $\sigma \in \mathfrak{D}_n$.

4) i)

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On a :

$\sigma \in \mathfrak{D}_n \Leftrightarrow \sigma$ n'a aucun point fixe

$$\Leftrightarrow \nu(\sigma) = 0$$

$$\nu(\sigma) = 0 \Leftrightarrow \sigma \in \mathfrak{D}_n$$



1b. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x^{\nu(\sigma)} = (x-1)^{n-1} (x+n-1).$$

2. Calculer

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma), \quad \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \nu(\sigma) \quad \text{et} \quad \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \frac{\varepsilon(\sigma)}{\nu(\sigma) + 1}.$$

3. Établir que

$$\text{Card}\{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \varepsilon(\sigma) = 1\} = \text{Card}\{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \varepsilon(\sigma) = -1\}$$

4. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, préciser à quelle condition sur $\nu(\sigma)$, on a $\sigma \in \mathfrak{D}_n$. En déduire que

$$\text{Card}\{\sigma \in \mathfrak{D}_n : \varepsilon(\sigma) = 1\} = \text{Card}\{\sigma \in \mathfrak{D}_n : \varepsilon(\sigma) = -1\} + (-1)^{n-1} (n-1).$$

4) iii)

$$\text{On a : } \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x^{\nu(\sigma)} = (x-1)^{n-1} (x+n-1)$$

$$\rightarrow x=0 \text{ donne : } (-1)^{n-1} (n-1)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x^{\nu(\sigma)} = (x-1)^{n-1} (x+n-1)$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \sigma \in \mathfrak{D}_n}} \varepsilon(\sigma) x^{\nu(\sigma)} + \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \sigma \notin \mathfrak{D}_n}} \varepsilon(\sigma) x^{\nu(\sigma)} = (x-1)^{n-1} (x+n-1)$$

$$\mathfrak{D}_n \begin{cases} \sigma \in \mathfrak{D}_n \Leftrightarrow \nu(\sigma) = 0 \\ \sigma \notin \mathfrak{D}_n \Leftrightarrow \nu(\sigma) \geq 1 \end{cases}, \text{ alors :}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \sigma \in \mathfrak{D}_n}} \varepsilon(\sigma) + \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \sigma \notin \mathfrak{D}_n}} \varepsilon(\sigma) x^{\overbrace{\nu(\sigma)}^{\geq 1}} = (x-1)^{n-1} (x+n-1)$$

Alors pour $n=0$, on aura :

$$\sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma \in \mathcal{D}_n}} \varepsilon(\sigma) + \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma \notin \mathcal{D}_n}} \varepsilon(\sigma) \cdot \underbrace{0^{\varepsilon(\sigma)}}_{=0, \text{ car } \varepsilon(\sigma) > 1} = (-1)^{n-1} (n-1)$$

$$\Rightarrow \sum_{\sigma \in \mathcal{D}_n} \varepsilon(\sigma) = (-1)^{n-1} (n-1)$$

$$\Rightarrow \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{D}_n \\ \varepsilon(\sigma)=1}} \underbrace{\varepsilon(\sigma)}_{=1} + \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{D}_n \\ \varepsilon(\sigma)=-1}} \underbrace{\varepsilon(\sigma)}_{=-1} = (-1)^{n-1} (n-1)$$

$$\Rightarrow \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{D}_n \\ \varepsilon(\sigma)=1}} 1 - \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{D}_n \\ \varepsilon(\sigma)=-1}} 1 = (-1)^{n-1} (n-1)$$

$$\Rightarrow \text{Card}(\{\sigma \in \mathcal{D}_n : \varepsilon(\sigma)=1\}) - \text{Card}(\{\sigma \in \mathcal{D}_n : \varepsilon(\sigma)=-1\}) = (-1)^{n-1} (n-1)$$

Enfin :

$$\text{Card}(\{\sigma \in \mathcal{D}_n : \varepsilon(\sigma)=1\}) = \text{Card}(\{\sigma \in \mathcal{D}_n : \varepsilon(\sigma)=-1\}) + (-1)^{n-1} (n-1)$$

□

5a. Justifier que les familles $(1, X, \dots, X^m)$ et $(1, (X-1), \dots, (X-1)^m)$ sont des bases de $\mathbb{R}_m[X]$.

Chaque de ces deux familles est de cardinal égal à $(m+1) = \dim(\mathbb{R}_m[X])$.

En plus, elles sont libres car constituées de polynômes non nuls et échelonnés de degrés.

D'où elles sont des bases de $\mathbb{R}_m[X]$.



Soit $m \in \mathbb{N}$. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \binom{m-1}{0} & & & & \binom{m-1}{m-1} & 0 \\ \binom{m}{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \binom{m}{m} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m+1}(\mathbb{R}).$$

5a. Justifier que les familles $(1, X, \dots, X^m)$ et $(1, (X-1), \dots, (X-1)^m)$ sont des bases de $\mathbb{R}_m[X]$.

5b. Montrer que la transposée de M est la matrice de l'application linéaire identité

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_m[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_m[X] \\ P & \longmapsto & P \end{array}$$

dans les bases $(1, X, \dots, X^m)$ au départ et $(1, (X-1), \dots, (X-1)^m)$ à l'arrivée.

Il s'agit de montrer que :

$$\text{mat}(\text{id}_{\mathbb{R}_m[X]}) \stackrel{=}{=} {}^t M$$

$$(1, X, \dots, X^m) \rightarrow (1, (X-1), \dots, (X-1)^m)$$

C'est de montrer que :

$$\text{mat} \begin{pmatrix} 1, X, \dots, X^m \\ 1, (X-1), \dots, (X-1)^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \cdots & \binom{m}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \cdots & \binom{m}{1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \binom{m}{m} \end{pmatrix}$$

Soit $0 \leq k \leq m$. Il s'agit de montrer que:

$$\text{mat}(X^k)_{(1, (X-1), \dots, (X-1)^m)} = \begin{pmatrix} \binom{k}{0} \\ \vdots \\ \binom{k}{k} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Càd de montrer que :

$$X^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (X-1)^i$$

On a :

$$X^k = ((X-1) + 1)^k$$

$$= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (X-1)^i \cdot 1^{k-i} \quad (\text{Binôme de Newton})$$

$$= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (X-1)^i$$

C.Q.F.D

Soit $m \in \mathbb{N}$. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \binom{m-1}{0} & & & & \binom{m-1}{m-1} & 0 \\ \binom{m}{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \binom{m}{m} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m+1}(\mathbb{R}).$$

5a. Justifier que les familles $(1, X, \dots, X^m)$ et $(1, (X-1), \dots, (X-1)^m)$ sont des bases de $\mathbb{R}_m[X]$.

5b. Montrer que la transposée de M est la matrice de l'application linéaire identité

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_m[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_m[X] \\ P & \longmapsto & P \end{array}$$

dans les bases $(1, X, \dots, X^m)$ au départ et $(1, (X-1), \dots, (X-1)^m)$ à l'arrivée.

5c. Établir que M est inversible et expliciter son inverse.

i) M est inversible ?

Méthode 1

M est triangulaire inférieure, dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls.

D'où M est inversible.



Méthode 2

M est inversible, comme matrice de $\text{id}_{\mathbb{R}_m[X]}$ qui est inversible, relativement à deux bases.

D'où M est inversible.



ii) Explicits M^{-1}

$$\varphi_n: \text{mat}(\text{id}_{\mathbb{R}_n[x]}) = \text{Id}_M$$

$$(1, x, \dots, x^m) \rightarrow (1, (x-1), \dots, (x-1)^m)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \text{mat}(\text{id}_{\mathbb{R}_m[x]}) \\ (1, x, \dots, x^m) \text{ ; } (1, (x-1), \dots, (x-1)^m) \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} t \\ M \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\Rightarrow \text{mat} \begin{pmatrix} \text{id}^{-1} \\ \mathbb{R}_m[x] \end{pmatrix} = \text{mat} \left(M^{-1} \right)^t$$

$$(1, (x-1), \dots, (x-1)^m) \text{ и } (1, x, \dots, x^m)$$

$$\Rightarrow \text{mat}(\text{id}_{\mathbb{R}_m[x]}) = (M^{-1})^t$$

$$(1, (x-1), \dots, (x-1)^m) \sim (1, x, \dots, x^m)$$

$$\Rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} \text{mat}(\text{id}_{R_m[x]}) \\ (1, (x-1), \dots, (x-1)^m) ; (1, x, \dots, x^m) \end{pmatrix}^t$$

Let n a:

$$\text{mat} \left(\text{id} \Big|_{R_m[x]} \right) = \text{mat} \left(1, (x-1), \dots, (x-1)^m \right)$$

$$(1, (x-1), \dots, (x-1)^m) \sim (1, x, \dots, x^m)$$

$$\forall 0 \leq k \leq m \text{ on } a: (X-1)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} X^i$$

2nd an:

$$\text{mat} \left(\text{id} \right)_{R_m[X]} = \text{mat} (1, (X-1), \dots, (X-1)^m) \\ (1, X, \dots, X^m)$$

$$(1, (X-1), \dots, (X-1)^m) \cdot (1, X, \dots, X^m)$$

$$= \begin{pmatrix} \binom{0}{0}(-1)^{0-0} & \binom{1}{0}(-1)^{1-0} & \dots & \binom{k}{0}(-1)^{k-0} & \dots & \binom{m}{0}(-1)^{m-0} \\ 0 & \binom{1}{1}(-1)^{1-1} & \dots & 0 & \dots & \binom{m}{1}(-1)^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \binom{k}{k}(-1)^{k-k} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \binom{m}{m}(-1)^{m-m} \end{pmatrix}$$

On fin:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \binom{0}{0}(-1)^{0-0} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \binom{1}{1}(-1)^{1-1} & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{k}{0}(-1)^{k-0} & \vdots & \vdots & \binom{k}{k}(-1)^{k-k} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{m}{0}(-1)^{m-0} & \binom{m}{1}(-1)^{m-1} & \dots & \dots & \dots & \binom{m}{m}(-1)^{m-m} \end{pmatrix}$$

Soit $m \in \mathbb{N}$. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \binom{m-1}{0} & & & & \binom{m-1}{m-1} & 0 \\ \binom{m}{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \binom{m}{m} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m+1}(\mathbb{R}).$$

5a. Justifier que les familles $(1, X, \dots, X^m)$ et $(1, (X-1), \dots, (X-1)^m)$ sont des bases de $\mathbb{R}_m[X]$.

5b. Montrer que la transposée de M est la matrice de l'application linéaire identité

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_m[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_m[X] \\ P & \longmapsto & P \end{array}$$

dans les bases $(1, X, \dots, X^m)$ au départ et $(1, (X-1), \dots, (X-1)^m)$ à l'arrivée.

5c. Établir que M est inversible et expliciter son inverse.

5d. En déduire que pour tous $(u_0, \dots, u_m), (v_0, \dots, v_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$,

$$\text{si } \forall k \leq m, \quad u_k = \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} v_\ell, \quad \text{alors } \forall k \leq m, \quad v_k = \sum_{\ell=0}^k (-1)^{k-\ell} \binom{k}{\ell} u_\ell.$$

Soient $(u_0, \dots, u_m)$ et $(v_0, \dots, v_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$.

Supposons que : $(\forall 0 \leq k \leq m, u_k = \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} v_\ell)$, et montrons que :

$$(\forall 0 \leq k \leq m, v_k = \sum_{\ell=0}^k (-1)^{k-\ell} \binom{k}{\ell} u_\ell)$$

$$\text{On a : } (\forall 0 \leq k \leq m, u_k = \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} v_\ell)$$

$$\Leftrightarrow (\forall 0 \leq k \leq m, u_k = \binom{k}{0} v_0 + \cdots + \binom{k}{k} v_k)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} v_0 \\ U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} v_0 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ U_k = \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix} v_0 + \dots + \begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix} v_k \\ \vdots \\ U_m = \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} v_0 + \dots + \begin{pmatrix} m \\ m \end{pmatrix} v_m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix} & \dots & \dots & \begin{pmatrix} m \\ m \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} U_0 \\ \vdots \\ U_m \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \begin{pmatrix} m-1 \\ 0 \end{pmatrix} & & & \begin{pmatrix} m-1 \\ m-1 \end{pmatrix} & 0 \\ \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} & \dots & \dots & \dots & \begin{pmatrix} m \\ m \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} U_0 \\ \vdots \\ U_m \end{pmatrix}$$

$$\text{On } M^{-1} = \begin{pmatrix} \binom{0}{0}(-1)^{0-0} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \binom{1}{1}(-1)^{1-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{k}{0}(-1)^{k-0} & \vdots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{m}{0}(-1)^{m-0} & \binom{m}{1}(-1)^{m-1} & \dots & \binom{m}{m}(-1)^{m-m} \end{pmatrix}$$

Ans:

$$\begin{cases} v_0 = \binom{0}{0}(-1)^{0-0} U_0 \\ \vdots \\ v_k = \binom{k}{0}(-1)^{k-0} U_0 + \dots + \binom{k}{k}(-1)^{k-k} U_k \\ \vdots \\ v_m = \binom{m}{0}(-1)^{m-0} U_0 + \dots + \binom{m}{m}(-1)^{m-m} U_m \end{cases}$$

$$\text{Câd : } \left(\forall 0 \leq k \leq m, v_k = \binom{k}{0}(-1)^{k-0} U_0 + \dots + \binom{k}{k}(-1)^{k-k} U_k \right)$$

Enfin :

$$\forall 0 \leq k \leq m, v_k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i}(-1)^{k-i} U_i$$

□