

Probabilités - Partie 2

Exercice 1 :

Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$ telle qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(X = k) = a C_n^k$$

- 1) Que vaut a ?
- 2) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 2 :

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de taille n et de paramètre p ; où $p \in]0, 1[$.

Calculer l'espérance de la variable aléatoire $Y = \frac{1}{X+1}$.

Exercice 3 :

On considère un dé cubique, de faces numérotées de 1 à 6.

On suppose que celui-ci est truqué, de sorte que la probabilité d'obtenir chaque face k est proportionnelle à k .

Soit X la variable aléatoire associée au lancer du dé (c-à-d donnant le numéro affiché) .

- 1) Déterminer la loi de X , puis calculer son espérance .
- 2) Considérons la variable aléatoire $Y = \frac{1}{X}$.
Déterminer la loi de Y et calculer son espérance $E(Y)$.

Exercice 4 :

Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels distincts deux à deux, où $n \in \mathbb{N}^*$.

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles **indépendantes** telles que

$$X(\Omega) = Y(\Omega) = \{a_1, \dots, a_n\}$$
$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(X = a_i) = P(Y = a_i) = p_i$$

- 1) Que vaut la somme $\sum_{i=1}^n p_i$?

- 2) Montrer que

$$P(X \neq Y) = \sum_{i=1}^n p_i(1 - p_i)$$

Exercice 5 :

Soient X une variable aléatoire réelle, et $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ une application strictement croissante.

Montrer que

$$\forall a \succ 0, P(|X| \geq a) \leq \frac{E(g(|X|))}{g(a)}$$

Indice : Vous pouvez utiliser l'inégalité de **Markov**.

Exercice 6 :

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $\mathbf{n}, \mathbf{p}$.

Montrer que

$$\forall \lambda, \varepsilon \succ 0, P(X - np \geq n\varepsilon) \leq E(\exp(\lambda(X - np - n\varepsilon)))$$

Exercice 7 :

Soient X et Y deux variables aléatoires **indépendantes**, suivant une loi binomiale de paramètres $\mathbf{n}, \mathbf{p}$ et $\mathbf{m}, \mathbf{p}$ respectivement.

Considérons la variable aléatoire somme $S = X + Y$.

1) Montrer que

$$\forall l \in \llbracket 0, m+n \rrbracket, \sum_{k=0}^l \binom{n}{k} \binom{m}{l-k} = \binom{m+n}{l}$$

Indice : Vous pouvez considérer le coefficient en X^l dans l'égalité polynomiale $(1+X)^{m+n} = (1+X)^m(1+X)^n$.

2) En déduire que la variable aléatoire S suit une loi binomiale de paramètres $\mathbf{m+n}$ et $\mathbf{p}$.

Exercice 8 :

Soient (Ω, T, P) un espace probabilisé **fini**, et X une variable aléatoire réelle positive.

Noter que $X(\Omega)$ est bien **fini**.

Montrer que

$$E(X) = 0 \Leftrightarrow (X = 0 \text{ presque sûrement})$$

Rappel : $(X = 0 \text{ presque sûrement})$ veut dire que $P(X = 0) = 1$, ou encore $P(X \neq 0) = 0$.