

Cette correction a été rédigée par Frédéric Bayart. Si vous avez des remarques à faire, ou pour signaler des erreurs, n'hésitez pas à écrire à : mathweb@free.fr

Problème 1

Partie I

1. Évident!

2.a. $E_1^{(0)} = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \exists b \in \mathbb{R}; \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + b\}$. Une suite de $E_1^{(0)}$ est donc une suite arithmétique de raison b . En particulier, $u \in E_1^{(0)}$ si, et seulement si, il existe deux réels b et c tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = nb + c$.

2.b. $E_0^{(0)} = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \exists b \in \mathbb{R}; \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = b\}$. Une suite de $E_0^{(0)}$ est donc stationnaire à partir de u_1 . En particulier, $u \in E_0^{(0)}$ si et seulement si il existe deux réels b et c tels que $u_0 = c$ et $u_n = b$ pour $n \geq 1$.

3. – $0 \in E_a^{(0)}$. Il suffit en effet de prendre $b_u = 0$.
– Soient $u, v \in E_a^{(0)}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$u_{n+1} + \lambda v_{n+1} = a(u_n + \lambda v_n) + (b_u + \lambda b_v).$$

Si on pose $w = u + \lambda v$, alors $w \in E_a^{(0)}$ avec $b_w = b_u + \lambda b_v$.

4. Avant de commencer, remarquons que $x \in E_a^{(0)}$ avec $b_x = 1 - a$, et $y \in E_a^{(0)}$ avec $b_y = 0$. Montrons alors que (x, y) est une famille libre. Si $\lambda x + \mu y = 0$, on a en particulier le système suivant (obtenu en faisant $n = 0$ et $n = 1$) :

$$\begin{cases} \lambda + \mu &= 0 \\ \lambda + a\mu &= 0 \end{cases}$$

Le déterminant du système est $a - 1$ qui est non nul. Ce système admet donc une unique solution qui est $\lambda = \mu = 0$: la famille (x, y) est libre.

5.a. On peut résoudre le système explicitement, ou utiliser comme ci-dessus que son déterminant est non nul : le système est inversible.

5.b. Nous procédons par récurrence sur n , le résultat étant prouvé pour $n = 0$ ou $n = 1$. S'il est vrai au rang n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= au_n + b \\ &= a\lambda x_n + a\mu y_n + b \end{aligned}$$

Or, on sait que $u_1 = au_0 + b$, ce qui donne $\lambda + a\mu = \lambda a + \mu a + b$, et on obtient $b = \lambda - \lambda a$. Reportant cela dans l'équation précédente, on trouve :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \lambda a + \mu a^{n+1} + \lambda - \lambda a \\ &= \lambda + \mu a^{n+1} \\ &= \lambda x_{n+1} + \mu y_{n+1}. \end{aligned}$$

5.c La famille (x, y) est génératrice de $E_a^{(0)}$.

6. D'après les questions précédentes, une base de $E_a^{(0)}$ est $\{x, y\}$: une suite u est dans $E_a^{(0)}$ si, et seulement si, il existe deux constantes λ et μ telles que, pour tout n , $u_n = \lambda + \mu a^n$. En particulier, $E_a^{(0)}$ est de dimension 2.

Partie II

1. Considérons d'abord :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_p[X] &\rightarrow \mathbb{R}^{p+1} \\ P &\mapsto (P(0), P(1), \dots, P(p)) \end{aligned}$$

φ est une application linéaire. Calculons son noyau : si $P \in \mathbb{R}_p[X]$ est tel que $P(0) = \dots = P(p) = 0$, alors P est un polynôme de degré au plus p qui admet $p+1$ racines. P est nécessairement le polynôme nul.

φ est donc injective. Supposons maintenant qu'il existe deux polynômes P et Q de $\mathbb{R}_p[X]$ tels que, pour tout n ,

$$u_{n+1} = au_n + P(n) = au_n + Q(n).$$

En évaluant pour $n = 0, \dots, p$, on trouve que $Q(0) = P(0), \dots, Q(p) = P(p)$, et donc $\varphi(P) = \varphi(Q)$. Par injectivité de φ , $P = Q$, et le polynôme qui intervient dans la relation de récurrence est unique.

2. On remarque d'abord que $0 \in E_a^{(p)}$ en prenant par exemple $P_u = 0$. Ensuite, si $u, v \in E_a^{(p)}$, et si $w = u + \lambda v$, il est facile de vérifier que w est aussi élément de $E_a^{(p)}$, avec $P_w = P_u + \lambda P_v$.

3. Nous venons de voir que $P_{u+\lambda v} = P_u + \lambda P_v$, et ceci, couplé à l'unicité du polynôme P_u , prouve que $\theta(u + \lambda v) = \theta(u) + \lambda \theta(v)$.

4.

$$\begin{aligned} u \in \text{Ker } \theta &\iff P_u = 0 \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n \\ &\iff \exists u_0, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = a^n u_0. \end{aligned}$$

On a donc $\text{Ker } \theta = \text{vect } y$, où y est toujours la suite définie par $y_n = a^n$.

5.a. Du fait que $a \neq 1$, il est clair que Q_k est degré k , le coefficient dominant étant $1 - a$.

5.b. C'est un résultat classique qu'une famille de polynômes de degrés tous différents est une famille libre. $(Q_0, \dots, Q_p)$ est donc une famille libre de $\mathbb{R}_p[X]$. Comme elle comporte $p+1$ vecteurs, et que $\dim \mathbb{R}_p[X] = p+1$, c'est en fait une base de $\mathbb{R}_p[X]$.

6.a. Soit $x^{(k)}$ la suite définie par $x_n^{(k)} = n^k$. Alors,

$$\begin{aligned} x_{n+1}^{(k)} &= (n+1)^k \\ &= an^k + [(n+1)^k - an^k] \\ &= ax_n^{(k)} + Q_k(n). \end{aligned}$$

En particulier, $x^{(k)} \in E_a^{(p)}$, et $\theta(x^{(k)}) = Q_k$ est dans l'image de θ .

6.b. On a donc $\text{vect}(Q_0, \dots, Q_p) \subset \mathbb{R}_p[X]$, et donc $\mathbb{R}_p[X] \subset \text{Im } \theta \subset \mathbb{R}_p[X]$: θ est surjective.

7. On applique le théorème du rang :

$$\text{rg } \theta + \dim \text{Ker } \theta = \dim E_a^{(p)},$$

ce qui donne $p + 2 = 1 + (p + 1) = \dim E_a^{(p)}$.

8. Il suffit de prouver que $(x^{(0)}, \dots, x^{(p)}, y)$ est une famille libre de $E_a^{(p)}$. Si $\lambda_0 x^{(0)} + \dots + \lambda_p x^{(p)} + \mu y = 0$, on applique θ et on obtient :

$$\lambda_0 Q_0 + \dots + \lambda_p Q_p = 0.$$

Mais $(Q_0, \dots, Q_p)$ est une famille libre, et donc $\lambda_0 = \dots = \lambda_p = 0$. De ce fait, $\mu = 0$ aussi, et le résultat est prouvé.

9. (u_n) se décompose en $u_n = \lambda_0 + \lambda_1 n + \mu a^n$. En regardant les conditions initiales $n = 0, 1, 2$, on obtient le système :

$$\begin{cases} \lambda_0 + \mu &= -2 \\ \lambda_0 + \lambda_1 + 2\mu &= 3 \\ \lambda_0 + 2\lambda_1 + 4\mu &= 11 \end{cases}$$

La résolution de ce système donne $\lambda_0 = -5$, $\lambda_1 = 2$, et $\mu = 3$. On a donc :

$$u_n = -5 + 2n + 3 \times 2^n.$$

Partie III

1. Nous reprenons les notations de la partie II. Le polynôme P_u est toujours unique, et il est facile de vérifier que le noyau de θ est cette fois l'espace vectoriel des suites constantes. Posons cette fois, pour $k \geq 1$, $R_k(X) = (X + 1)^k - X^k$. R_k est un polynôme de degré $k - 1$, et $(R_1, \dots, R_{p+1})$ est une base de $\mathbb{R}_p[X]$. Comme en **II.6.a.**, R_k est dans l'image de θ , car $\theta(x^{(k)}) = R_k$. On a donc $\dim E_a^{(p)} = p + 2$, une base en étant donnée par $(x^{(0)}, \dots, x^{(p+1)})$.

2. On a donc $u_n = \lambda_0 + \lambda_1 n + \lambda_2 n^2$. En appliquant aux rangs 0 à 2, on obtient le système :

$$\begin{cases} \lambda_0 &= -2 \\ \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 &= -1 \\ \lambda_0 + 2\lambda_1 + 4\lambda_2 &= -6 \end{cases}$$

Après résolution du système, il vient :

$$u_n = -2 + 4n - 3n^2.$$

FIN

