CONCOURS COMMUN INP 2022
CORRIGÉ DE MATHÉMATIQUES 2- MP

m.laamoum@gmail.com

EXERCICE 1

Q1. $V(x_1, x_2) = x_2 - x_1$.

Si il existe $i \neq j$ et $x_i = x_j$ alors $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, car il a deux colonnes identiques.

Dans la suite, $x_1, x_2 \dots, x_n$ sont n nombres complexes deux à deux distincts.

Q2. Soit $P : t \mapsto V(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, t)$.

- Le développement de $V(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ par rapport à la dernière colonne donne

$$P(t) = (-1)^{n+1}\Delta_{1,n} + (-1)^{n+2}\Delta_{2,n}t + (-1)^{n+3}\Delta_{3,n}t^2 + \dots + (-1)^{n+n}\Delta_{n,n}t^{n-1}$$

  avec $\Delta_{i,n}$ le déterminant obtenu en éliminant la ligne d'indice i et la colonne d'indice n de $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$, les $\Delta_{i,n}$ ne dépendent pas de t. Donc P est une fonction polynomiale de degré au plus $n-1$.

  Le coefficient de t^{n-1} est $\Delta_{n,n} = V(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$

- On a $P(x_i) = 0$ pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, car c'est un déterminant avec deux colonnes identiques, donc le polynôme $\prod_{1\leq i\leq n-1}(X - x_i)$ divise P , si P n'est pas le polynôme nul il est de degré $n-1$, donc $P(X) = C \prod_{1\leq i\leq n-1}(X - x_i)$, avec $C \in \mathbb{C}$.

  C est le coefficient du plus haut degré de P donc $C = V(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$.

  Ce qui donne pour $t = x_n$ $V(x_1, x_2 \dots, x_n) = V(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \prod_{1\leq i<j\leq n-1}(x_n - x_i)$.

- Montrons par récurrence que : $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1\leq i<j\leq n}(x_j - x_i)$.

  La relation est vraie pour $n = 2$.On la suppose pour n .

  Soit $x_1, x_2 \dots, x_{n+1}$ sont $n+1$ nombres complexes deux à deux distincts , on a

$$\begin{aligned} V(x_1, x_2 \dots, x_{n+1}) &= V(x_1, x_2, \dots, x_n) \prod_{1\leq i<j\leq n}(x_{n+1} - x_i) \\ &= \prod_{1\leq i<j\leq n}(x_j - x_i) . \prod_{1\leq i<j\leq n}(x_{n+1} - x_i) \\ &= \prod_{1\leq i<j\leq n+1}(x_j - x_i) \end{aligned}$$

  d'où le résultat.

Q3. Soit $A = (i^j)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$, on a

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2^2 & 2^3 & \cdots & 2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n^2 & n^3 & \dots & n^n \end{vmatrix}.$$

On factorise chaque ligne i , donc

$$\begin{aligned} \det A &= n! \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & n & n^2 & \dots & n^{n-1} \end{vmatrix} \\ &= n!\ V(1,2,\dots,n). \end{aligned}$$

car le déterminant d'une matrice est égale au déterminant de sa transposée.

Q4. On prend $a_k = e^{\frac{ik\pi}{n}}, k \in [\![1,n]\!]$.

Les nombres complexes $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont deux à deux distincts et tous non nuls, et

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = 0$$

Soit n nombre complexes $x_1, \dots, x_n$ deux à deux distincts et tous non nuls, on a donc $V(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ et la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

est inversible . Le vecteur colonne $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ est non nul donc MX l'est aussi .

Nous avons

$$MX = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \\ \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^n \end{pmatrix}.$$

ainsi l'une au moins des sommes $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k, \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2, \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^3 \quad \cdots \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^n$ est non nulle.

EXERCICE 2

Q5. Par récurrence on a $\left\|A^k\right\| \leqslant \|A\|^k$ pour tout $k \geq 0$.

La convergence de la série $\sum_{k\geq 0} \frac{\|A\|^k}{k!}$ entraîne la converge absolue de la série $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}A^k$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie , ce qui prouve la convergence de $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}A^k$.

Q6. Soit $f_k : A \mapsto \frac{1}{k!}A^k$ et $r > 0$, on a $\|f_k(A)\| \leq \frac{\|A\|^k}{k!} \leq \frac{r^k}{k!}$, donc la série $\sum_{k\geq 0} f_k$ converge normalement et uniformément sur la boule $B(0,r)$.

Continuité de f_k :

L'application $\varphi : (A_1, A_2, ..., A_k) \mapsto A_1 \times A_2 \times ... \times A_k$ est continue, car elle est k-linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^k$ vers $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'application $\psi : A \mapsto (A, A, ..., A)$ est linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^k$ donc elle est continue .

Ainsi $f_k = \frac{1}{k!}\varphi o \psi$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Le théorème de continuité des séries de fonctions donne , $A \mapsto e^A$ est continue sur $B(0,r)$ pour tout $r > 0$ donc elle est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Q7. Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice non nulle telle que $\|H\| \leq r$.

Par continuité de la norme on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|H\|}\left\|\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!}H^k\right\| &\leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\|H\|^{k-1}}{k!} \\ &\leq \|H\| \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{r^{k-2}}{k!} \end{aligned}$$

donc $\frac{1}{\|H\|}\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!}H^k \underset{H\to 0}{\rightarrow} 0$, qui s'écrit $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!}H^k = o(\|H\|)$.

Examinons la différence $e^{H+0} - e^0$, qui vaut

$$e^H - I_n = H + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!}H^k = H + o(\|H\|)$$

donc l'application $A \mapsto e^A$ est différentiable en la matrice 0 et sa différentielle est l'application identité.

PROBLÈME

Partie I - Exponentielle d'une matrice symétrique

Q8. On a

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-a & -b & -b \\ -b & \lambda-a & -b \\ -b & -b & \lambda-a \end{vmatrix} \\
&\underset{C_1\leftarrow C_1+C_2+C_3}{=} (\lambda-a-2b)\begin{vmatrix} 1 & -b & -b \\ 1 & \lambda-a & -b \\ 1 & -b & \lambda-a \end{vmatrix} \\
&\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{=} (\lambda-a-2b)\begin{vmatrix} 1 & -b & -b \\ 0 & \lambda-a+b & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-a+b \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-a-2b)\,(\lambda-a+b)^2
\end{aligned}$$

Donc $Sp(A)=\{a+2b, a-b\}$, par suite $A\in\mathcal{S}_3^+$, si et seulement si, ($a+2b\geq 0$ et $a\geq b$).

Q9. Par récurrence on a pour tout entier k non nul $J^k=3^{k-1}J$. La relation est non valable pour $k=0$.

On a $A=(a-b)I_3+bJ$ et , I_3 et J commutent donc

$$e^A=e^{(a-b)I_3}e^{bJ}$$

de plus $e^{(a-b)I_3}=e^{a-b}I_3$ et

$$\begin{aligned}
e^{bJ} &= I_3+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{b^k}{k!}J^k \\
&= I_3+\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(3b)^k}{k!}J \\
&= I_3+\frac{e^{3b}-1}{3}J
\end{aligned}$$

ainsi

$$e^A=e^{a-b}I_3+\frac{e^{a+2b}-e^{a-b}}{3}J$$

Nous avons

$$e^A=\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \alpha \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha=\frac{e^{a+2b}+2e^{a-b}}{3} \text{ et } \beta=\frac{e^{a+2b}-e^{a-b}}{3}$$

elle a la même forme que A par le même calcul on a $Sp(e^A)=\{\alpha+2\beta,\alpha-\beta\}=\left\{e^{a+2b},e^{a-b}\right\}$, d'où

$e^A \in \mathcal{S}_3^+$.

Q10. Soit P une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

L'application $M \mapsto PMP^{-1}$ est linéaire en dimensions finies donc elle est continue .

Soit $A \in \mathcal{S}_n^+$, D diagonale et P inversible telles que $A = PDP^{-1}$, par récurrence on a $A^k = PD^kP^{-1}$ ce qui donne

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}A^k = P\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}D^k\right)P^{-1}$$

l'application $M \mapsto PMP^{-1}$ est continue donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}A^k = P\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}D^k\right)P^{-1} \quad \text{et} \quad e^A = Pe^DP^{-1}$$

$D = \text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ donc $e^D = \text{diag}(e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_n})$, ainsi $e^A \in \mathcal{S}_n^+$.

Partie II - Produit de Hadamard de deux matrices

Q11. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_3^+$, donc $E(A) = \begin{pmatrix} e^a & e^b & e^b \\ e^b & e^a & e^b \\ e^b & e^b & e^a \end{pmatrix}$ elle a la même forme que A par le même calcul on a $Sp(E(A)) = \left\{e^a + 2e^b, e^a - e^b\right\}$.

On a $e^a + 2e^b \geq 0$ et $a \geq b$ car $A \in \mathcal{S}_3^+$ ce qui donne $e^a - e^b \geq 0$ ainsi $Sp(E(A)) \subset \mathbb{R}^+$et $E(A) \in \mathcal{S}_3^+$.

Q12.

- Soit $D = \text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ avec $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\} \subset \mathbb{R}^+$et $Y = {}^t(y_1, \ldots, y_n) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors

$$^tYDY = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2 \geq 0$$

- Soit $A \in \mathcal{S}_n$ donc elle est diagonalisable dans une base orthonormée , il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telles que $A = {}^tP.D.P$.

  Si $A \in \mathcal{S}_n^+$ alors $D \in \mathcal{S}_n^+$, soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on a

$$\begin{aligned} ^tXAX &= {}^tX\,{}^tP.D.PX \\ &= {}^t(PX\ ).D.(PX) \geq 0. \end{aligned}$$

- Réciproquement : si pour tout X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on a $^tXAX \geq 0$. Soit λ une vleur propre de A et $X = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$ un vecteur propre associé à λ de , alors

$$^tXAX = \lambda\,{}^tX\ X = \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

  donc $\lambda \geq 0$ par suite $A \in \mathcal{S}_n^+$.

  Ainsi $A \in \mathcal{S}_n^+$ si et seulement si pour tout X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on a $^tXAX \geq 0$.

Q13.

- Soit A et B dans $\mathcal{S}_n^+$ et α, β deux réels positifs. Pour pour tout X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on a

$$ {}^tX\left(\alpha A+\beta B\right)X = \alpha\,{}^tXAX+\beta\,{}^tXBX \geq 0 $$

donc $\alpha A+\beta B$ est une matrice de $\mathcal{S}_n^+$.

- Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{S}_n^+$ alors AB n'est pas forcement symétriques donc en général elle ne sont pas dans $\mathcal{S}_n^+$,

par exemple

$$ A=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\ ,\ B=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} $$

on a $A, B \in \mathcal{S}_2^+$:

$$ \begin{aligned} {}^tX\ AX &= \begin{pmatrix}x&y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \\ &= 2x^2+2xy+y^2 \\ &= x^2+(x+y)^2 \geq 0 \end{aligned} \qquad\Bigg|\qquad \begin{aligned} {}^tX\ BX &= \begin{pmatrix}x&y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \\ &= x^2+2xy+y^2 \\ &= x^2+(x+y)^2 \geq 0 \end{aligned} $$

mais

$$ AB=\begin{pmatrix}3&3\\2&2\end{pmatrix} \notin \mathcal{S}_2 $$

Q14. Soit $A \in \mathcal{S}_n^+$, donc elle est diagonalisable dans une base orthonormée , il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale $D=\operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ avec $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\} \subset \mathbb{R}^+$ et telles que $A={}^tP.D.P$.

Posons $R={}^tP.\operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_n}).P$, on a $R \in \mathcal{S}_n^+$ et $A=R^2$.

Q15. Soit A et B dans $\mathcal{S}_n^+$, $A=U^2$ et $B=V^2$ avec $U=(u_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^+$. $V=(v_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^+$.

Posons $A=(a_{i,j})$, $B=(b_{i,j})$ et $A*B=(c_{i,j})$.

- Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a $a_{i,j}=\sum\limits_{k=1}^{n} u_{i,k}u_{k,j}$, or U est symétrique donc $u_{i,j}=u_{j,i}$ donc $a_{i,j}=\sum\limits_{k=1}^{n} u_{k,i}u_{k,j}$, de même $b_{i,j}=\sum\limits_{\ell=1}^{n} v_{i,\ell}v_{\ell,j}=\sum\limits_{\ell=1}^{n} v_{\ell,i}v_{\ell,j}$, ainsi

$$ c_{i,j}=a_{i,j}b_{i,j}=\left(\sum_{k=1}^{n} u_{k,i}u_{k,j}\right)\left(\sum_{\ell=1}^{n} v_{\ell,i}v_{\ell,j}\right). $$

- Soit X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$, on a :

$$\begin{aligned}
{}^tX\,(A*B)\,X &= (x_1,\ldots,x_n)\begin{pmatrix}\sum\limits_{j=1}^n c_{1,j}x_j\\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^n c_{n,j}x_j\end{pmatrix}\\
&= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n c_{i,j}x_ix_j\\
&= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_ix_j\left(\sum_{k=1}^n u_{k,i}u_{k,j}\right)\left(\sum_{\ell=1}^n v_{\ell,i}v_{\ell,j}\right)
\end{aligned}$$

posons $u'_{k,i} = u_{k,i}x_i$ pour tout $(k,i) \in [\![1,n]\!]^2$ et $U' = (u'_{k,i})_{\substack{1\le k\le n\\1\le i\le n}}$.

On a ${}^tU'U' = (a'_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}} = (\sum\limits_{k=1}^n u'_{k,i}u'_{k,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}$donc

$$\begin{aligned}
{}^tX\,(A*B)\,X &= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\left(\sum_{k=1}^n u'_{k,i}u'_{k,j}\right)\left(\sum_{\ell=1}^n v_{\ell,i}v_{\ell,j}\right)\\
&= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a'_{i,j}b_{i,j}\\
&= \mathrm{Tr}((a'_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}.{}^t(b_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}.)\\
&= \mathrm{Tr}({}^tU'U'.V^2) \qquad (\text{ car } V \text{ est symétrique })\\
&= \mathrm{Tr}({}^t(U'V)\,.U'V)\\
&= \left\|U'V\right\|^2 \qquad (\text{ norme euclidienne de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))
\end{aligned}$$

Ainsi $A * B \in \mathcal{S}_n^+$.

Q16. Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}$, on a alors $A^{*0} = (1)_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}$ et $A^{*p} = (a_{i,j}^p)_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}$.
Pour N entier naturel non nul

$$\begin{aligned}
T_N &= \sum_{p=0}^N \frac{1}{p!}A^{*p}\\
&= (\sum_{p=0}^N \frac{a_{i,j}^p}{p!})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}
\end{aligned}$$

donc $\lim\limits_{N\to+\infty} T_N = (e^{a_{i,j}})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}} = E(A)$.

Q17. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, l'application $\Phi : M \mapsto {}^tXMX$ est linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers $\mathbb{R}$ donc elle est continue.

Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de $\mathcal{S}_n^+$, montrons que $\lim\limits_{k\to+\infty} A_k \in \mathcal{S}_n^+$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $\Phi(A_k) = {}^tXA_kX \ge 0$, Φ est continue donc

$$\lim_{k\to+\infty}\Phi(A_k) = \Phi\left(\lim_{k\to+\infty}A_k\right) = {}^tXAX \ge 0,$$

ainsi $A \in \mathcal{S}_n^+$ et $\mathcal{S}_n^+$ est une partie fermée de $\mathcal{S}_n$.

Soit $A \in \mathcal{S}_n^+$, d'après Q15 et par récurrence $A^{*k} \in \mathcal{S}_n^+$, et d'après Q13, $T_N \in \mathcal{S}_n^+$ car elle est combinaison linéaire , avec des coefficients positifs, de matrices symétriques positives .

Par suite $E(A) = \lim_{N \to +\infty} T_N \in \mathcal{S}_n^+$.

FIN