

CONCOURS COMMUN 2008
DES ECOLES DES MINES D'ALBI, ALES, DOUAI, NANTES
Epreuve de Mathématiques
(toutes filières)

CORRECTION

SECOND PROBLÈME

Partie A - Études de deux fonctions

1. (a) F et G sont continues sur $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$.

(b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 1$ et donc F est prolongeable par continuité en 0 en posant $F(0) = 1$.

$\frac{1 - \cos x}{x} \underset{0^+}{\sim} \frac{x^2/2}{x} = \frac{x}{2}$. Par suite, $\lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = 0$ et G est prolongeable par continuité en 0 en posant $G(0) = 0$.

2. (a) F et G sont dérivables sur $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$. De plus, pour $x > 0$, $F'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$ et $G'(x) = \frac{x \sin x - (1 - \cos x)}{x^2}$.

$$\forall x > 0, F'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \text{ et } G'(x) = \frac{x \sin x - 1 + \cos x}{x^2}.$$

(b) Quand x tend vers 0,

$$F(x) = \frac{x + o(x^2)}{x} = 1 + o(x) = F(0) + o(x).$$

F admet en 0 à droite un développement limité d'ordre 1. F est donc dérivable en 0 et de plus $F'(0) = 0$.

De même, quand x tend vers 0,

$$G(x) = \frac{1 - (1 - \frac{x^2}{2}) + o(x^2)}{x} = \frac{x}{2} + o(x) = G(0) + \frac{1}{2}x + o(x).$$

G est donc dérivable en 0 avec $G'(0) = \frac{1}{2}$.

$$F \text{ et } G \text{ sont dérivables en } 0 \text{ avec } F'(0) = 0 \text{ et } G'(0) = \frac{1}{2}.$$

3. (a) Soit $x > 0$. $F(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* / x = k\pi$.

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, a_k = k\pi.$$

(b) Soit $x > 0$. $G(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* / x = 2k\pi$.

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, b_k = 2k\pi.$$

Pour tout entier naturel non nul, $b_k = a_{2k}$ et la suite (b_k) est extraite de la suite (a_k) .

4. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- F est continue sur $[a_k, a_{k+1}]$,
- F est dérivable sur $]a_k, a_{k+1}[$,
- $F(a_k) = F(a_{k+1}) (= 0)$.

D'après le théorème de ROLLE, il existe $x_k \in]a_k, a_{k+1}[$ tel que $F'(x_k) = 0$.

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists x_k \in]a_k, a_{k+1}[/ F'(x_k) = 0.$$

(b) Pour tout réel $x > 0$, $F'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$ et donc pour tout réel $x > 0$, $F'(x)$ est du signe de $h(x)$.

(c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. h est dérivable sur $[a_k, a_{k+1}]$ et pour $x \in [a_k, a_{k+1}]$, $h'(x) = \cos x - x \sin x - \cos x = -x \sin x$. Maintenant, pour $x \in]a_k, a_{k+1}[(=]k\pi, (k+1)\pi[$, on a $x > 0$ et $(-1)^k \sin x > 0$. On en déduit que la fonction $(-1)^k h'$ est strictement positive sur $]a_k, a_{k+1}[$ et donc que h est strictement monotone sur $[a_k, a_{k+1}]$.

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \text{ la fonction } h \text{ est strictement monotone sur } [a_k, a_{k+1}].$$

(d) La fonction h est ainsi injective sur $[a_k, a_{k+1}]$ et en particulier s'annule au plus une fois sur $[a_k, a_{k+1}]$. D'après la question (b), il en est de même de la fonction F' ce qui montre l'unicité du réel x_k .

(e) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $h(a_k) = k\pi \cos k\pi - \sin k\pi = (-1)^k k\pi$ et $h(a_k + \frac{\pi}{2}) = (k\pi + \frac{\pi}{2}) \cos(k\pi + \frac{\pi}{2}) - \sin(k\pi + \frac{\pi}{2}) = -(-1)^k$. Par suite, $h(a_k)h(a_k + \frac{\pi}{2}) = -k\pi < 0$. Ainsi, la fonction h est continue sur $[a_k, a_{k+1}]$ et vérifie $h(a_k)h(a_k + \frac{\pi}{2}) < 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires montre que la fonction h s'annule au moins une fois dans l'intervalle $]a_k, a_k + \frac{\pi}{2}[$. Par unicité de x_k , on a donc $x_k \in]a_k, a_k + \frac{\pi}{2}[$.

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, x_k \in]a_k, a_k + \frac{\pi}{2}[.$$

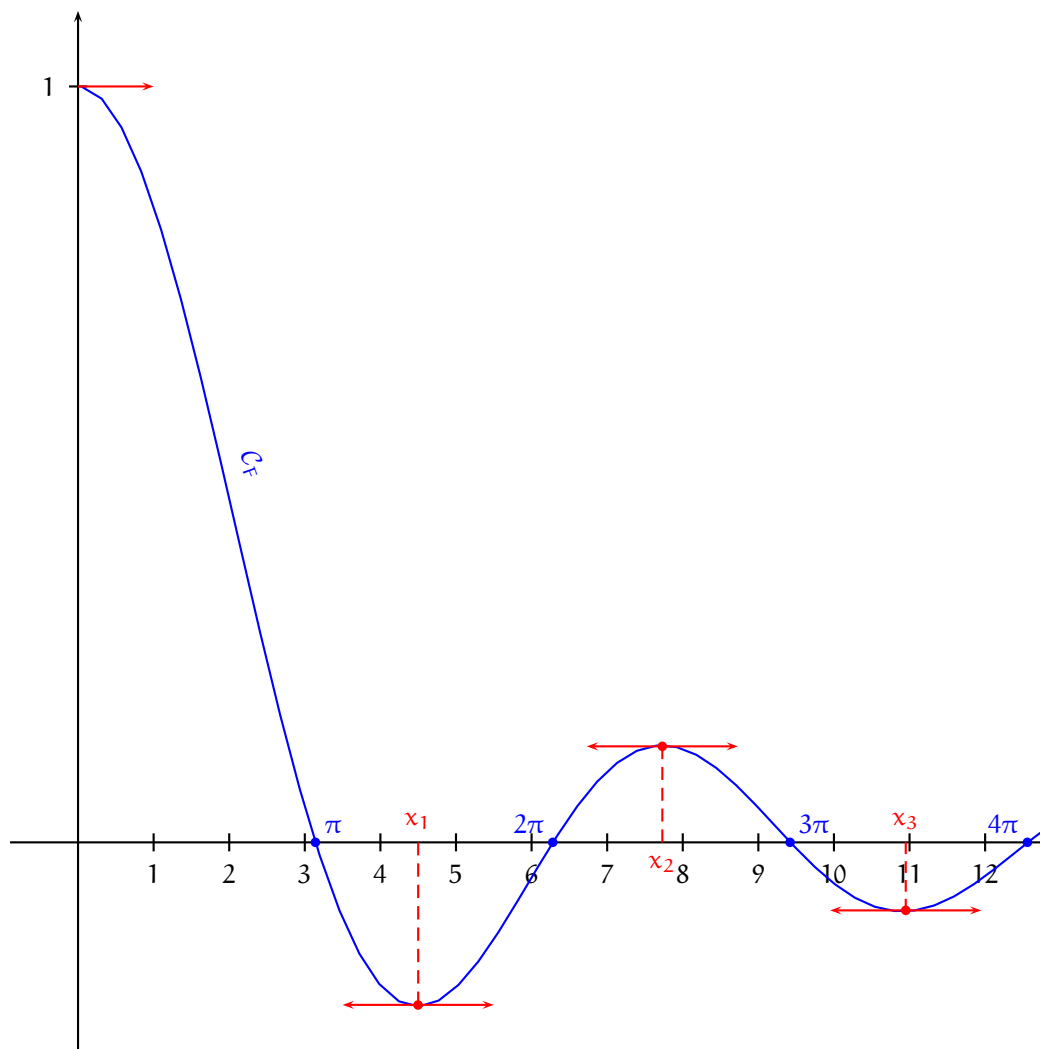
(f) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $x_k \geq k\pi$. Comme $\lim_{k \rightarrow +\infty} k\pi = +\infty$, on a $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = +\infty$. Plus précisément, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on a $k\pi < x_k < k\pi + \frac{\pi}{2}$ et donc

$$1 < \frac{x_k}{k\pi} < 1 + \frac{1}{2k}.$$

Comme $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{2k} = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_k}{k\pi} = 1$ et donc que

$$x_k \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} k\pi.$$

5. Courbe représentative de F.



Partie B - Deux fonctions définies par des intégrales

6. Soit $x \in \mathbb{R}$. Les deux fonctions $t \mapsto f(t) \cos(xt)$ et $t \mapsto f(t) \sin(xt)$ sont continues sur le segment $[0, 1]$. On en déduit l'existence des deux réels $I_f(x)$ et $J_f(x)$.

Les deux fonctions I_f et J_f sont définies sur $\mathbb{R}$.

7. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$I_f(-x) = \int_0^1 f(t) \cos(-xt) \, dt = \int_0^1 f(t) \cos(xt) \, dt = I_f(x) \text{ et } J_f(-x) = \int_0^1 f(t) \sin(-xt) \, dt = - \int_0^1 f(t) \sin(xt) \, dt = -J_f(x).$$

I_f est paire et J_f est impaire.

8. (a) Soit $x > 0$.

$$I_f(x) + iJ_f(x) = \int_0^1 f(t) \cos(xt) \, dt + i \int_0^1 f(t) \sin(xt) \, dt = \int_0^1 f(t)(\cos(xt) + i \sin(xt)) \, dt = \int_0^1 f(t)e^{ixt} \, dt.$$

Maintenant, les deux fonctions $t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto \frac{e^{ixt}}{x}$ sont de classe C^1 sur le segment $[0, 1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$I_f(x) + iJ_f(x) = \left[f(t) \frac{e^{ixt}}{x} \right]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 f'(t) \frac{e^{ixt}}{x} dt = \frac{f(1)e^{ix} - f(0)}{x} - \frac{1}{x} \int_0^1 f'(t) e^{ixt} dt.$$

$$\forall x > 0, I_f(x) + iJ_f(x) = \frac{f(1)e^{ix} - f(0)}{x} - \frac{1}{x} \int_0^1 f'(t) e^{ixt} dt.$$

(b) Les fonctions f et f' sont continues sur le segment $[0, 1]$ et donc bornées sur ce segment.

(c) Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned} |I_f(x) + iJ_f(x)| &= \left| \frac{f(1)e^{ix} - f(0)}{x} - \frac{1}{x} \int_0^1 f'(t) e^{ixt} dt \right| \\ &\leq \frac{|f(1)|e^{ix} + |f(0)|}{x} + \frac{1}{x} \int_0^1 |f'(t)| e^{ixt} dt = \frac{|f(1)| + |f(0)|}{x} + \frac{1}{x} \int_0^1 |f'(t)| dt \\ &\leq \frac{M + M}{x} + \frac{1}{x} \int_0^1 M' dt = \frac{2M + M'}{x}. \end{aligned}$$

$$\forall x > 0, |I_f(x) + iJ_f(x)| \leq \frac{2M + M'}{x}.$$

(d) Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2M + M'}{x} = 0$, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} I_f(x) + iJ_f(x) = 0$ puis que $\lim_{x \rightarrow +\infty} I_f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} J_f(x) = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} I_f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} J_f(x) = 0.$$

(e) Puisque la fonction I_f est paire, on a aussi $\lim_{x \rightarrow -\infty} I_f(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} I_f(-X) = \lim_{X \rightarrow +\infty} I_f(X) = 0$ et de même $\lim_{x \rightarrow -\infty} J_f(x) = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} I_f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} J_f(x) = 0.$$

9. (a) Soient p et q deux réels. $\cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

(b) Soit $u \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \sin t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}, \sin'(t) = |\cos t| \leq 1$. L'inégalité des accroissements finis fournit alors

$$|\sin u| = |\sin u - \sin 0| \leq 1 \times |u - 0| = |u|.$$

$$\forall u \in \mathbb{R}, |\sin u| \leq |u|.$$

(c) Soient x et y deux réels.

$$|I_f(x) - I_f(y)| = \left| \int_0^1 f(t) \cos(xt) dt - \int_0^1 f(t) \cos(yt) dt \right| = \left| \int_0^1 f(t) (\cos(xt) - \cos(yt)) dt \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| -2 \int_0^1 f(t) \sin\left(\frac{(x-y)t}{2}\right) \sin\left(\frac{(x+y)t}{2}\right) dt \right| \\
&\leq 2 \int_0^1 |f(t)| \left| \sin\left(\frac{(x-y)t}{2}\right) \right| \left| \sin\left(\frac{(x+y)t}{2}\right) \right| dt \\
&\leq 2 \int_0^1 |f(t)| \left| \frac{(x-y)t}{2} \right| \times 1 dt = |x-y| \int_0^1 t |f(t)| dt.
\end{aligned}$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |I_f(x) - I_f(y)| \leq |x - y| \int_0^1 t |f(t)| dt.$$

(d) Ainsi, la fonction I_f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ et en particulier continue sur $\mathbb{R}$.

I_f est continue sur $\mathbb{R}$.

10. Soit $x > 0$. Pour $t \in \mathbb{R}$, posons $f(t) = 1$. On a alors

$$I_f(x) = \int_0^1 \cos(xt) dt = \left[\frac{\sin(xt)}{x} \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{\sin x}{x} = F(x),$$

et

$$J_f(x) = \int_0^1 \sin(xt) dt = \left[\frac{-\cos(xt)}{x} \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1 - \cos x}{x} = G(x).$$

Si $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = 1$, alors $\forall x > 0, I_f(x) = F(x)$ et $J_f(x) = G(x)$.

FIN

