

A. Etude de deux applications

1. Montrons que f est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$: Soit $P = a + bX + cX^2$ un élément quelconque de $\mathbb{R}_2[X]$. Alors

$$f(P) = \frac{1}{2} \left[P \left(\frac{X}{2} \right) + P \left(\frac{X+1}{2} \right) \right] = \frac{1}{2} \left[a + \frac{bX}{2} + \frac{cX^2}{4} + a + b\frac{X+1}{2} + c\frac{(X+1)^2}{4} \right]$$

Après simplification, on trouve
$$f(P) = \frac{1}{2} \left(c\frac{X^2}{2} + \left(\frac{c}{2} + b \right) X + 2a + \frac{b}{2} + \frac{c}{4} \right) \in \mathbb{R}_2[X].$$

Montrons que f est linéaire :

Soient P, Q deux éléments de $\mathbb{R}_2[X]$ et λ, μ deux réels.

$$f(\lambda P + \mu Q) = \frac{1}{2} \left[(\lambda P + \mu Q) \left(\frac{X}{2} \right) + (\lambda P + \mu Q) \left(\frac{X+1}{2} \right) \right] = \frac{1}{2} \left[\lambda P \left(\frac{X}{2} \right) + \mu Q \left(\frac{X}{2} \right) + \lambda P \left(\frac{X+1}{2} \right) + \mu Q \left(\frac{X+1}{2} \right) \right].$$

Donc, après regroupement des termes,

$$f(\lambda P + \mu Q) = \frac{\lambda}{2} \left[P \left(\frac{X}{2} \right) + P \left(\frac{X+1}{2} \right) \right] + \frac{\mu}{2} \left[Q \left(\frac{X}{2} \right) + Q \left(\frac{X+1}{2} \right) \right].$$

Finalement,

$$f(\lambda P + \mu Q) = \lambda f(P) + \mu f(Q).$$

Ceci montre que

f est linéaire.

2. Montrons que φ est linéaire.

Soient P, Q deux éléments de $\mathbb{R}_2[X]$ et λ, μ deux réels.

$$\varphi(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(1) = \lambda P(1) + \mu Q(1) = \lambda \varphi(P) + \mu \varphi(Q),$$

ce qui prouve que

φ est linéaire.

3. On calcule :

$$f(1) = \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

$$f(X) = \frac{1}{2} \left(\frac{X}{2} + \frac{X+1}{2} \right) = \frac{X}{2} + \frac{1}{4}.$$

$$f(X^2) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{X}{2} \right)^2 + \left(\frac{X+1}{2} \right)^2 \right] = \frac{X^2}{4} + \frac{X}{4} + \frac{1}{8}.$$

On en déduit que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

4. Le déterminant de f est égal au déterminant de sa matrice dans la base $\mathcal{B}$. Donc

$$\det f = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = \frac{1}{8} \neq 0$$

donc f est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

Ainsi, f est à la fois injective et surjective.

5. Soit $P = a + bX + cX^2$ un élément quelconque de $\mathbb{R}_2[X]$.

$$P \in \text{Ker } \varphi \iff \varphi(P) = 0 \iff a + b + c = 0 \iff a = -b - c.$$

D'où

$$P \in \text{Ker } \varphi \iff P = b(X-1) + c(X^2-1),$$

où les réels b, c sont quelconques. Ainsi

$$\text{Ker } \varphi = \text{Vect}\{X - 1, X^2 - 1\}.$$

La famille $\{X - 1, X^2 - 1\}$ est génératrice du noyau de φ . De plus, les deux polynômes $X - 1, X^2 - 1$ sont non proportionnels donc ils forment une famille libre (ou bien on peut dire qu'ils sont tous deux non nuls et qu'ils forment une famille échelonnée en degré donc libre). Donc

$$(X - 1, X^2 - 1) \text{ est une base de } \text{Ker } \varphi \text{ et } \dim \text{Ker } \varphi = 2$$

Autre solution : Soit P un élément quelconque de $\mathbb{R}_2[X]$.

$$P \in \text{Ker } \varphi \iff \varphi(P) = 0 \iff P(1) = 0 \iff X - 1 \mid P.$$

Donc

$$\begin{aligned} P \in \text{Ker } \varphi &\iff \exists Q \in \mathbb{R}_1[X], P = (X - 1)Q \\ &\iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, P = (X - 1)(aX + b) \\ &\iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, P = a(X^2 - X) + b(X - 1) \\ &\iff P \in \text{Vect}\{X^2 - X, X - 1\} \end{aligned}$$

Donc

$$\text{Ker } \varphi = \text{Vect}\{X^2 - X, X - 1\}.$$

Comme dans la solution précédente, on montre ensuite que

$$(X^2 - X, X - 1) \text{ est une base de } \text{Ker } \varphi \text{ et } \dim \text{Ker } \varphi = 2$$

6. $\dim \text{Ker } \varphi = 2 \neq 0$ donc $\text{Ker } \varphi \neq \{0\}$ donc

$$\varphi \text{ n'est pas injective.}$$

De plus, par le théorème du rang,

$$\dim \mathbb{R}_2[X] = \dim \text{Ker } \varphi + \dim \text{Im } \varphi.$$

donc $\dim \text{Im } \varphi = 3 - 2 = 1$. Or $\dim \mathbb{R} = 1$ et $\text{Im } \varphi \subset \mathbb{R}$ donc $\text{Im } \varphi = \mathbb{R}$ et donc

$$\varphi \text{ est surjective.}$$

B. Calcul des puissances successives d'une matrice

7. La famille $\mathcal{B}'$ est une famille libre, car c'est une famille de polynômes tous non nuls et échelonnée en degré. De plus, elle comporte trois éléments, et $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3$ donc

$$\text{la famille } \mathcal{B}' \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X].$$

8. On trouve

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

9. La matrice Q est inversible car c'est une matrice de passage. Un rapide calcul montre que

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

10. On calcule et on trouve $f(1) = 1$, $f(-2X + 1) = \frac{-2X + 1}{2}$ et $f(6X^2 - 6X + 1) = \frac{1}{4}(6X^2 - 6X + 1)$. On en déduit que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

11. On constate que la matrice A est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, d'après la question A.3.

D'après les formules de changement de base, $M = Q^{-1}AQ$ donc $A = QMQ^{-1}$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = QM^nQ^{-1}$. Or la matrice M est diagonale donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2^{2n}} \end{pmatrix}.$$

Donc, après calculs,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} & \frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3 \cdot 2^{2n+1}} \\ 0 & \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{2n}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2^{2n}} \end{pmatrix}}.$$

12. Soit $P = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$. On note $V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Calculer $f^n(P)$ revient à calculer matriciellement $A^n V$, car A est la matrice de f dans $\mathcal{B}$ et V est le vecteur colonne contenant les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}$.

$$A^n V = \begin{pmatrix} a + \frac{b}{2} - \frac{b}{2^{n+1}} + \frac{c}{3} - \frac{c}{2^{n+1}} + \frac{c}{3 \cdot 2^{2n+1}} \\ \frac{b}{2^n} + \frac{c}{2^n} - \frac{c}{2^{2n}} \\ \frac{c}{2^{2n}} \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$f^n(P) = a + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)b + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3 \cdot 2^{2n+1}}\right)c + \left(\frac{b}{2^n} + \frac{c}{2^n} - \frac{c}{2^{2n}}\right)X + \frac{c}{2^{2n}}X^2.$$

13. Avec les notations précédentes,

$$\varphi(f^n(P)) = a + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)b + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3 \cdot 2^{2n+1}}\right)c + \left(\frac{b}{2^n} + \frac{c}{2^n} - \frac{c}{2^{2n}}\right) + \frac{c}{2^{2n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \boxed{a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}}.$$

De plus,

$$\int_0^1 P(t) dt = \left[at + \frac{bt^2}{2} + \frac{ct^3}{3} \right]_0^1 = \boxed{a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}}.$$

Ceci prouve que

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(f^n(P)) = \int_0^1 P(t) dt.}$$

C. Une autre preuve du résultat précédent

14. On fixe $P \in \mathbb{R}_2[X]$ et on procède par récurrence sur n .

Soit $\mathcal{H}_n$ la propriété

$$\mathcal{H}_n : \quad "f^n(P) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)"$$

Initialisation : pour $n = 1$,

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2^1-1} P\left(\frac{X+k}{2}\right) = \frac{1}{2} \left[P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right) \right] = f(P)$$

ce qui montre que $\mathcal{H}_1$ est vraie.

Hérédité : Supposons la propriété $\mathcal{H}_n$ vraie à un rang n fixé. Montrons alors que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie. Comme $\mathcal{H}_n$ est vraie,

$$f^n(P) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)$$

Donc

$$f^{n+1}(P) = f(f^n(P)) = f\left(\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)\right)$$

Or f est linéaire donc on obtient

$$f^{n+1}(P) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)\right) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{2} \left[P\left(\frac{\frac{X+k}{2^n} + 1}{2}\right) + P\left(\frac{\frac{X+k}{2^n} + k}{2^n}\right) \right].$$

Après séparation en deux sommes, on trouve

$$f^{n+1}(P) = \frac{1}{2^{n+1}} \left[\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+2k}{2^{n+1}}\right) + \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+2k+1}{2^{n+1}}\right) \right].$$

Or lorsque k varie dans l'ensemble $\{0, 1, 2, \dots, 2^n - 1\}$, $2k$ varie dans l'ensemble $\{0, 2, 4, \dots, 2^{n+1} - 2\}$, $2k+1$ varie dans l'ensemble $\{1, 3, 5, \dots, 2^{n+1} - 1\}$ et la réunion de ces deux ensembles disjoints est $\{0, 1, 2, \dots, 2^{n+1} - 1\}$. Ceci justifie que l'on puisse "rassembler" les deux sommes en une seule et obtenir ainsi

$$f^{n+1}(P) = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} P\left(\frac{X+k}{2^{n+1}}\right).$$

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : la propriété $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ ce qui démontre le résultat souhaité.

15. On va utiliser le résultat suivant sur les sommes de Riemann.

Premier énoncé possible :

Soit $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n g\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b g(t) dt.$$

Remarque : on peut aussi énoncer le résultat pour des sommes de Riemann "à gauche" :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b g(t) dt.$$

Deuxième énoncé possible : (cas particulier du résultat précédent lorsque $a = 0$ et $b = 1$)

Soit $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 g(t) dt.$$

En appliquant par exemple le deuxième énoncé à la fonction polynomiale P , on trouve

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 P(t) dt.$$

En particulier, la suite $(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant une suite extraite de la suite $(n)_{n \in \mathbb{N}}$, on trouve que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} P\left(\frac{k}{2^n}\right) = \int_0^1 P(t) dt.$$

Posons $j = k - 1$ dans la somme $\sum_{k=1}^{2^n} P\left(\frac{k}{2^n}\right)$. Il vient alors $\sum_{k=1}^{2^n} P\left(\frac{k}{2^n}\right) = \sum_{j=0}^{2^n-1} P\left(\frac{j+1}{2^n}\right)$. Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^{2^n-1} P\left(\frac{j+1}{2^n}\right) = \int_0^1 P(t) dt.$$

Or $\frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^{2^n-1} P\left(\frac{j+1}{2^n}\right) = \varphi(f^n(P))$ d'après la question précédente. Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(f^n(P)) = \int_0^1 P(t) dt.$$

FIN

