Nombres Complexes

Résumé

I) Rappels et Compléments

Tous les nombres qu'on rencontrera sont des nombres Complexes.

$$\overline{\sum_{k=1}^{n} z_k} = \sum_{k=1}^{n} \overline{z_k}$$

$$\overline{\prod_{k=1}^{n} z_k} = \prod_{k=1}^{n} \overline{z_k}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

$$z = Re(z) + i\, Im(z)$$

$$Re(z) \in \mathbb{R} \text{ et } Im(z) \in \mathbb{R}$$

$$|z| = \sqrt{(Re(z))^2 + (Im(z))^2}$$

$$z = 0 \iff (Re(z) = 0 \text{ et } Im(z) = 0)$$

$$z \times \overline{z} = |z|^2$$

- $\forall z \in \mathbb{C}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \begin{cases} \mathrm{Re}(\alpha z) = \alpha \, \mathrm{Re}(z) \\ \mathrm{Im}(\alpha z) = \alpha \, \mathrm{Im}(z) \end{cases}$

- $\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} z_k \right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Re}(z_k)$

- $\mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} z_k \right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Im}(z_k)$

- $z \in \mathbb{R} \iff \bar{z} = z$

- $z \in i\mathbb{R} \iff \bar{z} = -z$

- $|z| = 0 \iff z = 0$

- $|z| = |-z| = |\bar{z}|$

- $\left| \prod_{k=1}^{n} z_k \right| = \prod_{k=1}^{n} |z_k|$

- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire)

- $\left| \sum_{k=1}^{n} z_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|$

  (inégalité triangulaire généralisée)

- $\big| |z| - |z'| \big| \leq |z - z'| \leq |z| + |z'|$

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

$$\boxed{\begin{aligned} e^{i\theta} + e^{-i\theta} &= 2\cos(\theta) \\ e^{i\theta} - e^{-i\theta} &= 2i\sin(\theta) \end{aligned}}$$ (Formules d'Euler)

$$\arg(e^{i\theta}) = \theta \; [2\pi]$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad e^{2k\pi i} = 1$$

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

c-à-d

$$\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

(Formules de Moivre)

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \cos(k\pi) = (-1)^k$$

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \mathrm{Re}(e^{i\theta}) \\ \sin(\theta) = \mathrm{Im}(e^{i\theta}) \end{cases}$$

Écriture exponentielle d'un complexe non nul.

$$\boxed{z = r e^{i\theta}}$$

où $r = |z|$ et $\arg(z) = \theta \, [2\pi]$

$$\mathbb{U} = \{ z \in \mathbb{C} \,/\, |z| = 1 \}$$

$$z \in \mathbb{U} \iff |z| = 1$$

$$z \in \mathbb{U} \iff \bar{z} = \frac{1}{z}$$

$$z \in \mathbb{U} \iff (\exists \theta \in \mathbb{R},\ z = e^{i\theta})$$

(Règle de l'angle-moitié)

$$e^{i\theta} + 1 = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$$e^{i\theta} - 1 = 2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{\frac{i\theta}{2}}$$

$$e^{i\theta} + e^{i\theta'} = 2\cos\left(\frac{\theta - \theta'}{2}\right) e^{i\frac{\theta + \theta'}{2}}$$

$$e^{i\theta} - e^{i\theta'} = 2i\sin\left(\frac{\theta - \theta'}{2}\right) e^{i\frac{\theta + \theta'}{2}}$$

(Formules d'addition)

$$\cos\theta + \cos\theta' = 2\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right)$$

$$\sin\theta + \sin\theta' = 2\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right)$$

$$\cos\theta - \cos\theta' = -2\sin\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right)$$

$$\sin\theta - \sin\theta' = 2\sin\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right)$$

Linéarisation de $\cos^n x$ et $\sin^n x$

Linéariser $\cos^n x$ ou $\sin^n x$ c'est les écrire comme combinaison linéaire de termes de la forme $\cos(kx)$ ou $\sin(kx)$, où $k \in \mathbb{N}$.

Mise en oeuvre

On remplace $\cos x$ par $\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ et $\sin x$ par $\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ puis on développe via le binôme de Newton.
On simplifie, puis on conclut enfin via Euler.

Exponentielle d'un nombre Complexe

Définition

Pour $z = Re(z) + i\,Im(z)$. On a :

$$e^{z} = e^{Re(z)} \times e^{i\,Im(z)}$$

Prop

Soit $z \in \mathbb{C}$.

1) $|e^{z}| = e^{Re(z)}$

2) $\forall z \in \mathbb{C},\ e^{z} \neq 0 \quad (\text{car } e^{z} \in \mathbb{C}^{*})$

3) $\forall z, z' \in \mathbb{C},\ e^{z+z'} = e^{z} \times e^{z'}$

II) Racine Carrée d'un nombre Complexe

1) Définition et exemples

Prop

Soient $a, z \in \mathbb{C}$.

z est dite racine Carrée de a si et seulement si :

$$z^{2} = a$$

2) Détermination pratique des racines Carrées

Soit $a = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}^{*}$.

Voyons Comment déterminer ses racines Carrées.

On procède de la manière suivante (à retenir).

Soit $z = x + yi \in \mathbb{C}$. On a :

$$z^2 = a \iff (x+iy)^2 = \alpha + \beta i$$

$$\iff (x^2 - y^2) + 2xyi = \alpha + \beta i$$

$$\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = \alpha \\ 2xy = \beta \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = \alpha \\ x^2 + y^2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \\ 2xy = \beta \end{cases} \quad (\text{c'est} : |z|^2 = |a|)$$

$$\iff \begin{cases} x^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2} + \alpha\right) & (\text{par sommation}) \\ y^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2} - \alpha\right) & (\text{par soustraction}) \\ 2xy = \beta \end{cases}$$

$$z^2 = a \iff \begin{cases} x = \pm\sqrt{\star} \\ y = \pm\sqrt{\star} \\ 2xy = \beta \end{cases}$$

x a 2 valeurs possibles, et y aussi.

Alors $z = x + yi$ a 4 valeurs possibles.

Mais $xy = \frac{\beta}{2}$ indique si $xy \geqslant 0$ ou $xy \leqslant 0$.

Du coup, on saura si x et y ont le même signe ou deux signes contraires.

Enfin, $\boxed{z = x + yi \text{ aura deux valeurs uniquement.}}$

III) Résolution de l'équation « $az^2+bz+c=0$ »

Ici (E) : $az^2+bz+c=0$

où $(a,b,c)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}$

On verra comment résoudre l'équation (E) de second degré à coéfficients complexes.

Notations

1) $\Delta=b^2-4ac$; le discriminent de (E).

2) δ désigne une racine carré complexe de Δ.

On a :

Prop

1) Si $\Delta\neq 0$

(E) possède deux solutions complexes :

$$z_1=\frac{-b-\delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2=\frac{-b+\delta}{2a}$$

2) Si $\Delta=0$

(E) possède une unique solution complexe :

$$z_1=\frac{-b}{2a}$$

IV) Racines nèmes d'un nombre complexe

1) Généralités

Déf 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soient z et $a \in \mathbb{C}$.

On dit que z est une racine nème de a si et seulement si $z^n = a$.

NB :

1) Pour $n = 2$, on parle de racine carrée.

2) Pour $n = 3$, on parle de racine cubique.

Notation et vocabulaire

1) Une racine nème de 1 s'appelle racine nème de l'unité.

2) $\mathbb{U}_n$ désignera l'ensemble des racines nèmes de l'unité.

À retenir

1) $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \,/\, z^n = 1\}$

$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| = 1\}$

2) $z \in \mathbb{U}_n \iff z^n = 1$

$z \in \mathbb{U} \iff |z| = 1$

3) $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$

2) Les racines nèmes de l'unité

Prop

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

1) $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2k\pi i}{n}} \,/\, k \in \mathbb{Z} \right\}$

2) $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2k\pi i}{n}} \,/\, 0 \leqslant k \leqslant n-1 \right\}$

3) $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2k\pi i}{n}} \,/\, 1 \leqslant k \leqslant n \right\}$

Prop

Soit $n \geqslant 2$.

La somme de toutes les racines nème de l'unité est nulle.

Notation

$$j = e^{\frac{2\pi i}{3}}$$

Prop

1) $j^3 = 1$

2) $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

3) $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$: les 3 racines cubiques de l'unité.

4) $1 + j + j^2 = 0$

5) $j^2 = \frac{1}{j} = \bar{j}$

Prop

Soit $n \geq 3$.

Les racines nème de l'unité sont les sommets d'un polygone régulier.

3) Racines nèmes d'un complexe non nul

Prop

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}^*$.

Posons $a = re^{i\theta}$, son écriture exponentielle.

Les racines nèmes de a sont les complexes de la forme :

$$\sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}} \; ; \text{ où } 0 \leq k \leq n-1$$

Fin