

CNM Maths 2



Remarques :

- ☞ La réciproque de la question 5 de l'exercice, la matrice A doit être non nulle.
- ☞ Dans la question 2.5.2 les matrices A_1, \dots, A_m sont **deux à deux distinctes**.
- ☞ La question 3.6.2, $A \in \mathcal{F} \setminus \mathbb{R}.I_2$.

Exercice 1.

1. Soit λ une valeur propre de A , et V un vecteur propre associé, $V \neq 0$ et $AV = \lambda V$, on a donc ${}^tVAV = \lambda {}^tVV \geq 0$, donc $\lambda \geq 0$ (${}^tVV > 0$).
2. La matrice A est symétrique, donc elle est orthogonalement diagonalisable, autrement dit ; il existe une matrice orthogonale P tel que $A = {}^tPDP$, où $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A . D'après le résultat de la question précédente, les valeurs propres de A sont toutes positives, notons alors Δ la matrice diagonale $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$, et $M = {}^tP\Delta P$, on a donc ${}^tMM = {}^tP\Delta P {}^tP\Delta P = {}^tPDP = A$.
3. 3.1 Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Si $AX = 0$, alors ${}^tX {}^tMMX = 0$, ainsi ${}^t(MX)(MX) = 0$ ou encore $\langle MX, MX \rangle = 0$, donc $MX = 0$.
Si $MX = 0$, alors ${}^tMMX = 0$, donc $AX = 0$.
- 3.2 Dans la question précédente on a démontré que $\ker A = \ker M$, par application de la formule du rang, on a $\text{rg } A = n - \dim(\ker A) = n - \dim(\ker M) = \text{rg } M$.
4. 4.1 tC_i est la i -ième ligne de la matrice M , et C_j la j -ième colonne de M , comme $a_{i,j}$ est le produit de la i -ième ligne de tM par la j -ième colonne de M , alors $a_{i,j} = {}^tC_i C_j = \langle C_i, C_j \rangle$.
- 4.2 D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $\langle C_i, C_j \rangle^2 \leq \langle C_i, C_i \rangle \langle C_j, C_j \rangle$, c'est-à-dire $a_{i,j}^2 \leq a_{i,i} a_{j,j}$.
5. Si $\text{rg } A = 1$, alors $\text{rg}(C_1, \dots, C_n) = \text{rg } M = \text{rg } A = 1$, ainsi pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$ la famille (C_i, C_j) est liée, dans ce cas l'inégalité de Cauchy-Schwarz devienne une égalité c'est-à-dire $a_{i,j}^2 = a_{i,i} a_{j,j}$.

La réciproque n'est vraie, que si la matrice A est supposée non nul : Si de plus la matrice A est non nul : il existe i_0 tel que $C_{i_0} \neq 0$, si $j \in \{1, \dots, n\}$, par hypothèse $\langle C_{i_0}, C_j \rangle^2 = a_{i_0,j}^2 = a_{i_0,i_0} a_{j,j} = \langle C_{i_0}, C_{i_0} \rangle \langle C_j, C_j \rangle$, c'est la cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, donc la famille (C_{i_0}, C_j) est liée, ainsi $\text{Vect}(C_1, \dots, C_n) = \text{Vect}(C_{i_0})$, ce qui montre que $\text{rg } M = 1$, et donc $\text{rg } A = 1$.

Exercice 1. suite

6. 6.1 Si la matrice B est positive, et puisqu'elle est symétrique, en appliquant le résultat de la question 4.b, on a $b_{i,j}^2 \leq b_{i,i}b_{j,j}$, c'est-à-dire $a_{i,i}a_{j,j} \leq a_{i,j}^2$, d'autre part la matrice A étant symétrique positive, alors $a_{i,j}^2 \leq a_{i,i}a_{j,j}$, ce qui montre que $a_{i,j}^2 = a_{i,i}a_{j,j}$, d'où le résultat par application du résultat de la question 5 ($A \neq 0$).

6.2 On suppose que $\text{rg} A = 1$ donc $\text{rg} M = \text{rg}(C_1, \dots, C_n) = 1$. Soit $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $\text{Vect}(C_1, \dots, C_n) = \text{Vect}(V)$ évidemment $V \neq 0$, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ il existe $\lambda_j \in \mathbb{R}$ tel que $C_j = \lambda_j V$, ainsi, pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $a_{i,j} = \langle C_i, C_j \rangle = \lambda_i \lambda_j \langle V, V \rangle = (\alpha \lambda_i)(\alpha \lambda_j)$ où

$\alpha = \sqrt{\langle V, V \rangle}$. Le vecteur $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \lambda_1 \\ \vdots \\ \alpha \lambda_n \end{pmatrix}$ répond à la question.

$b_{i,j} = \frac{1}{a_{i,j}} = \frac{1}{u_i u_j} = \frac{1}{u_i} \frac{1}{u_j}$, donc $B = U'^t U'$ où $U' = \begin{pmatrix} \frac{1}{u_1} \\ \vdots \\ \frac{1}{u_n} \end{pmatrix}$, et si X est un vecteur colonne

alors ${}^t X B X = {}^t (U' X) (U' X) \geq 0$.

PROBLÈME

Première partie :

Caractérisation des homothétie en dimension 2 Application au commutant

1. 1.1 $f \in \mathcal{L}(E)$.

1.1.1 Soit $x \in E \setminus \{0\}$, la famille $(x, f(x))$ est liée avec x non nul, alors il existe $\lambda_x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$.

1.1.2 On a $f(e_1 + e_2) = \lambda_{e_1+e_2}(e_1 + e_2)$, d'autre part $f(e_1 + e_2) = f(e_1) + f(e_2) = \lambda_{e_1} e_1 + \lambda_{e_2} e_2$, donc $(\lambda_{e_1+e_2} - \lambda_{e_1})e_1 + (\lambda_{e_1+e_2} - \lambda_{e_2})e_2 = 0$, ce qui donne $\lambda_{e_1+e_2} = \lambda_{e_1} = \lambda_{e_2}$.

1.1.3 Soit $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 \in E$, on a $f(x) = \lambda x_1 e_1 + \lambda x_2 e_2 = \lambda x$.

1.2 f un endomorphisme.

1.2.1 $0, f \in \mathcal{C}(f)$. Soit $g, h \in \mathcal{C}(f)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $(g + \lambda h)f = gf + \lambda hf = fg + \lambda fh = f(g + \lambda h)$, donc $g + \lambda h \in \mathcal{C}$.

1.2.2 Si f est une homothétie, tout endomorphisme de E commute avec f , ainsi $\mathcal{C}(f) = \mathcal{L}(E)$.

1.3 f un endomorphisme de E qui n'est pas une homothétie.

1.3.1 f n'est pas une homothétie, d'après la question 1.1, il existe $e \in E$ non nul tel que $(e, f(e))$ soit libre, comme $\dim E = 2$, cette famille est une base de E .

1.3.2 $g(e) \in E$, $(e, f(e))$ est une base de E , alors il existe un unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ tel que $g(e) = \alpha e + \beta f(e)$.

Supposons $g \in \mathcal{C}(f)$: d'une part $g(e) = \alpha e + \beta f(e) = \alpha \text{Id}_E(e) + \beta f(e) = (\alpha \text{Id}_E + \beta f)(e)$, d'autre part $g(f(e)) = f(g(e)) = f(\alpha e + \beta f(e)) = \alpha f(e) + \beta f(f(e)) = (\alpha \text{Id}_E + \beta f)(f(e))$, donc les deux endomorphismes g et $\alpha \text{Id}_E + \beta f$ coïncident sur la base $(e, f(e))$, ainsi

$$g = \alpha \text{Id}_E + \beta f.$$

Réciproquement, si $g = \alpha \text{Id}_E + \beta f$, et comme $\mathcal{C}(f)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ et $\text{Id}_E, f \in \mathcal{C}(f)$, alors $g \in \mathcal{C}(f)$.

- 1.3.3 D'après ce qui précède, on a $\mathcal{C}(f) = \text{Vect}(\text{Id}_E, f)$, comme f n'est pas une homothétie, ceci signifie que la famille (Id_E, f) est libre donc base de $\mathcal{C}(f)$, en particulier $\dim \mathcal{C}(f) = 2$.

1.4

- 1.4.1 Si A est une matrice scalaire, alors toute matrice commute avec A , ainsi $\mathcal{C}(A) = \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

- 1.4.2 Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A , A n'est pas une matrice scalaire, donc f n'est une homothétie, soit $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et g l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice B ; B commute avec A si, et seulement si, g commute avec f si, et seulement si, $g = \alpha \text{Id}_E + \beta f$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, si, et seulement si, $B = \alpha I_2 + \beta A$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, d'où $\mathcal{C}(A) = \text{Vect}(I_2, A)$, A n'est pas une matrice scalaire, donc la famille (I_2, A) est libre, donc base de $\mathcal{C}(A)$, en particulier $\dim \mathcal{C}(A) = 2$.

Deuxième partie : Diagonalisation simultanée dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$

2. 2.1 Si $a \neq c$: Dans ce cas la matrice A possède deux valeurs propres distincts (a et c), donc diagonalisable.

Si $a = c$ et $b = 0$: Dans ce cas la matrice A est diagonale, donc diagonalisable.

Si $a = c$ et $b \neq 0$: Dans ce cas la seule valeur propre de A est a , son polynôme minimal est $(X - a)^2$ (car $X - a$ n'est pas annulateur), donc n'est pas diagonalisable.

Conclusion : A est diagonalisable si, et seulement si, $a \neq c$ ou $a = c$ et $b = 0$.

- 2.2 La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. D'après la question précédente.

- 2.3 Si A est diagonalisable, il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D , telles que $A = PDP^{-1}$, donc $A + \lambda I_2 = P(D + \lambda I_2)P^{-1}$, ainsi $A + \lambda I_2$ est diagonalisable.
Si $A + \lambda I_2$ est diagonalisable, il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D , tel que $A + \lambda I_2 = PDP^{-1}$, donc $A = P(D - \lambda I_2)P^{-1}$, ainsi A est diagonalisable.

- 2.4 A et B diagonalisables, avec $AB = BA$.

- 2.4.1 Si A est une matrice scalaire : il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A = \lambda I_2$, B étant diagonalisable, soit P une matrice inversible et Δ diagonale, tels que $PBP^{-1} = \Delta$, on a aussi $PAP^{-1} = \lambda I_2$, donc les deux matrices A et B sont simultanément diagonalisables.

Si A n'est pas une matrice scalaire : A commute avec B donc $B \in \mathcal{C}(A) = \text{Vect}(I_2, A)$ (question 1.4.2), il existe alors $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tels que $B = \alpha I_2 + \beta A$, soit maintenant P une matrice inversible, tel que $D = PAP^{-1}$ soit diagonale, alors $PBP^{-1} = \alpha I_2 + \beta D$ est aussi diagonale.

- 2.4.2 Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, d'après le résultat de la question précédente, il existe une matrice P inversible, tel que les matrices $D = PAP^{-1}$ et $\Delta = PBP^{-1}$ soient diagonales, on a donc $P(A + \lambda B)P^{-1} = D + \lambda \Delta$ qui est diagonale, ainsi la matrice $A + \lambda B$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

2.5

- 2.5.1 Si toutes les matrices sont scalaires : Le résultat est trivial ; par exemple $P = I_2$ répond à la question.

S'il existe $k \in I$ tel que A_k n'est pas une matrice scalaire : Dans ce cas $\mathcal{C}(A_k) = \text{Vect}(I_2, A_k)$,

et pour tout $i \in I$, $A_i \in \mathcal{C}(A_k) = \text{Vect}(I_2, A_k)$, donc, pour tout $i \in I$, il existe $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{K}$ tels que $A_i = \alpha_i I_2 + \beta_i A_k$. Comme la matrice A_k est diagonalisable, il existe une matrice inversible P tel que $D_k = PA_k P^{-1}$ soit diagonale, on en déduit alors que pour tout $i \in I$, la matrice $PA_i P^{-1} = \alpha_i I_2 + \beta_i D_k$ est diagonale, d'où le résultat.

2.5.2 Les matrices A_1, \dots, A_m sont deux à deux distinctes : D'après le résultat de la question précédente, il existe une matrice inversible P tel que , pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, la matrice $D_i = PA_i P^{-1}$ est diagonale, puisque $A_i^2 = I_2$ pour $1 \leq i \leq m$, alors le polynôme $X^2 - 1$ est annulateur de A_i , ainsi, pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $\text{Sp}(A_i) \subset \{-1, 1\}$. Donc chaque matrice D_i est de la forme $\text{diag}(\pm 1, \pm 1)$, il vient alors que $D_i \in \{\text{diag}(1, 1) = I_2, \text{diag}(1, -1), \text{diag}(-1, -1), \text{diag}(-1, 1)\}$, par suite, pour tout $1 \leq i \leq m$ on a ; $A_i \in \{I_2, P^{-1} \text{diag}(1, -1)P, P^{-1} \text{diag}(-1, -1)P, P^{-1} \text{diag}(-1, 1)P\}$. Si les matrices A_1, \dots, A_m sont supposées deux à deux distincts, alors $m \leq 4$, sinon!!!!!!!!!!!!!!?

2.6

2.6.1 Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la matrice $J + \lambda K$ est symétrique réelle, donc diagonalisable.

2.6.2
$$JK = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & d \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & d \end{pmatrix} = KJ$$

2.7

2.7.1 B étant diagonalisable, donc il existe une matrice inversible P et deux complexes α, β tel que $B = P \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} P^{-1}$, et comme B n'est pas une matrice scalaire, alors $\alpha \neq \beta$ (car si $\alpha = \beta$ alors $B = \alpha I_2$ matrice scalaire).

2.7.2 $\delta_\lambda = \gamma^2 \lambda^2 + 2\lambda\gamma(d - a) + (a - d)^2 + 4bc$. Puisque $\gamma^2 \neq 0$, alors δ_γ est un polynôme de degré 2 en λ .

2.7.3 δ_λ est un polynôme de degré 2 en λ , alors il existe $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\delta_{\lambda_0} = 0$, ainsi le polynôme caractéristique χ_{λ_0} admet une seule racine r , ceci montre que r est l'unique valeur propre de la matrice $A + \lambda_0(B - \alpha I_2) = A + \lambda_0 B - \alpha I_2$ qui est diagonalisable (par hypothèse $A + \lambda_0 B$ diagonalisable, et à l'aide la question 2.3). Il existe alors une matrice inversible Q tel que $Q(A + \lambda_0(B - \alpha I_2))Q^{-1} = r I_2$, autrement dit $A + \lambda_0(B - \alpha I_2) = r I_2$. D'où le résultat.

2.7.4 $A + \lambda_0(B - \alpha I_2) = r I_2$, donc $A = (r + \alpha \lambda_0) I_2 - \lambda_0 B$, par suite les deux matrices A et B commutent.

Troisième partie :

Étude des sous espaces de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ formés de matrices diagonalisables

3.

3.1

3.1.1 On suppose que \mathcal{F} contient une matrice A qui n'est pas scalaire.

Soit $B \in \mathcal{F}$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $B + \lambda A \in \mathcal{F}$, ainsi pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, la matrice $B + \lambda A$ est diagonalisable, puisque les deux matrices A et B sont diagonalisables avec A n'est pas scalaire, d'après le résultat de la question 2.7, les deux matrices A et B commutent, ce qui montre que $B \in \mathcal{C}(A)$, ainsi $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(A)$.

\mathcal{F} sous espace vectoriel de $\mathcal{C}(A) = \text{Vect}(I_2, A)$ (A n'est pas scalaire), donc $1 \leq \dim(\mathcal{F}) \leq 2 = \dim \mathcal{C}(A)$, ou bien \mathcal{F} est une droite vectorielle dans ce cas $\mathcal{F} = \text{Vect}(A)$ ($0 \neq A \in \mathcal{F}$) et sa dimension est égal à 1, ou bien un plan vectoriel et dans ce cas $\mathcal{F} = \mathcal{C}(A)$ et $\dim \mathcal{F} = 2$.

3.1.2) Dans le cas restant, toutes matrices de \mathcal{F} est scalaires, c'est-à-dire tout élément de \mathcal{F} est de la forme λI_2 , et puisque \mathcal{F} est non nul, il contient alors une matrice de la forme λI_2 avec $\lambda \neq 0$, en particulier il contient I_n , il vient alors que $\mathcal{F} = \text{Vect}(I_2)$. Dans ce cas il s'agit d'une droite vectorielle.

3.2) $\text{Vect}(I_2)$ sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ formé de matrices diagonalisables, et de dimension 1.

On pose $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors $\text{Vect}(I_2, M)$ est sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ de dimension 2 formé de matrices diagonalisables.

3.3) l'application $M \mapsto PMP^{-1}$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donc si \mathcal{M} est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, son image $P\mathcal{M}P^{-1}$ par cet endomorphisme est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. De plus l'endomorphisme précédent est un automorphisme, donc les deux sous espaces vectoriels \mathcal{M} et $P\mathcal{M}P^{-1}$ ont même dimension.

3.4) Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, la matrice A est symétrique si, et seulement si, $a_{1,2} = a_{2,1}$ si, et seulement si, $a_{1,2} - a_{2,1} = 0$. On considère maintenant l'application $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, définie pour tout $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, par $\varphi(A) = a_{1,2} - a_{2,1}$, c'est bien que φ est une forme linéaire non nul sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, de noyau $\ker \varphi = \mathcal{S}_2$, qui est alors un hyperplan de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. De plus toute matrice réelle symétrique est diagonalisable.

3.5) $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, il en est de même pour $R\mathcal{S}_2(\mathbb{R})R^{-1}$ (par 3.3), de plus un élément de $R\mathcal{S}_2(\mathbb{R})R^{-1}$ est de la forme RSR^{-1} qui est semblable à S où $S \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ diagonalisable. D'où le résultat.

3.6)

3.6.1) Supposons que $I_2 \notin \mathcal{F}$.

On a donc $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \mathcal{F} \oplus \text{Vect}(I_2)$, et si $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors $M = A + \lambda I_n$, où A est une matrice appartenant à \mathcal{F} qui est donc diagonalisable et $\lambda \in \mathbb{R}$, ceci montre que M est une matrice diagonalisable (question 2.3), ou encore toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est diagonalisable, ce qui n'est pas le cas. par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

3.6.2) Soit $A \in \mathcal{F} \setminus \mathbb{R} \cdot I_2$. A diagonalisable et n'est pas scalaire, donc elle possède deux valeurs propres distinctes α et β , il existe aussi une matrice inversible Q tel que $A = Q \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} Q^{-1}$, mais $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = (\alpha - \beta) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta I_2$, ainsi $A = (\alpha - \beta)Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1} + \beta I_2$,

on a donc $Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1} = \frac{1}{\alpha - \beta} A - \frac{\beta}{\alpha - \beta} I_2 \in \mathcal{F}$.

3.6.3) $\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = B - (a - b)A_1 - bI_2 \in \mathcal{W}$.

Si $\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \in \text{Vect}(I_2, A_1)$, alors $b = c = 0$ et dans ce cas la matrice $B \in \text{Vect}(I_2, A_1)$, ce qui n'est pas le cas. Donc $\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \notin \text{Vect}(I_2, A_1)$.

La matrice $\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable, et n'est pas scalaire, donc possède deux valeurs propres distinctes λ et γ , d'une part $\lambda + \gamma = \text{tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \right) = 0$, donc $\gamma = -\lambda$, et d'autre part $-\lambda^2 = \det \left(\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \right) = -bc$, donc $bc > 0$.

3.6.4 $\frac{1}{c} \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{c} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{W}$, comme $bc > 0$, on a aussi $\frac{b}{c} > 0$, il suffit alors de prendre $w = \sqrt{\frac{b}{c}} > 0$.

Il est clair que la matrice $B_1 \notin \text{Vect}(I_2, A_1)$ (car n'est pas diagonale), donc la famille (I_2, A_1, B_1) est libre, ainsi base de \mathcal{W} ($\dim \mathcal{W} = 3$), c'est bien que $\mathcal{W} = \text{Vect}(I_2, A_1, B_1)$.

3.6.5 $\chi_{B_1} = (X + w)(X - w)$, donc les valeurs propres de B_1 sont $-w$ et w .
 $\begin{pmatrix} -w \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $-w$, et $\begin{pmatrix} w \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre w , on a donc :

$$B_1 = P_1 \text{diag}(-w, w)P_1^{-1}$$

où $P_1 = \begin{pmatrix} -w & w \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On considère maintenant la matrice symétrique $S = \begin{pmatrix} 0 & w \\ w & 0 \end{pmatrix}$, dont les valeurs propres sont $-w$ et w , donc semblable à la matrice $\text{diag}(-w, w)$. Plus précisément

$$S = P_2 \text{diag}(-w, w)P_2^{-1} \text{ où } P_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ on a donc } P_1^{-1}BP_1 = P_2^{-1}SP_2 \text{ ou encore } S =$$

$$PB_1P^{-1} \text{ où } P = P_2P_1^{-1}, \text{ en fait } P = \frac{-1}{2w} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -w \\ -1 & -w \end{pmatrix} = \text{diag}(\frac{1}{w}, 1), \text{ d'autre part on a } PI_2P^{-1} = I_2 \text{ et } PA_1P^{-1} = A_1 \text{ (deux matrices diagonales commutent).}$$

En résumé : $PI_2P^{-1} = I_2 \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, $PA_1P^{-1} = A_1 \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ et $PB_1P^{-1} = S \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, donc \mathcal{W} est conjugué à un sous espace vectoriel de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ ($M \mapsto PMP^{-1}$).

Conclusion : \mathcal{F} est conjugué à \mathcal{W} et ce dernier est conjugué à un sous espace vectoriel de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, alors \mathcal{F} est conjugué à un sous espace vectoriel de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

3.7 Le résultat est clair si $\dim \mathcal{V} = 0$.

Si $\dim \mathcal{V} = 1$: Dans ce cas, $\mathcal{V} = \text{Vect}(A)$ où A une matrice diagonalisable, il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P tel que $A = PDP^{-1}$, donc le sous espace vectoriel $\text{Vect}(A)$ est conjugué à $\text{Vect}(D)$ qui est un sous espace vectoriel de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

Si $\dim \mathcal{V} = 2$: on va distinguer les deux cas suivants :

- Si $I_2 \in \mathcal{V}$: dans ce cas $\mathcal{V} = \text{Vect}(I_2, A)$, où A est une matrice diagonalisable, n'est pas scalaire ; il existe une matrice D diagonale et une matrice inversible P tels que $A = PDP^{-1}$, dans ce cas \mathcal{V} est conjugué à $\text{Vect}(I_2, D)$ qui est un sous espace vectoriel de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.
- Si $I_2 \notin \mathcal{V}$: alors $\mathbb{R}.I_2 \oplus \mathcal{V}$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donc conjugué à $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ (question 3.6.5), ainsi \mathcal{V} est conjugué à son image (sous espace vectoriel de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$) par cette conjugaison.

Si $\dim \mathcal{V} = 3$: Déjà fait 3.6.5.

3.8 Remarque : Si A est une matrice orthogonalement diagonalisable, alors elle est symétrique ; en effet, il existe P orthogonale et D diagonale telles que $A = {}^tPDP$, on a donc ${}^tA = {}^tP{}^tD{}^tP = {}^tPDP = A$.

Ainsi les sous espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formés de matrices orthogonalement diagonalisables, sont les sous espaces vectoriels de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

