Extrait du Problème N°1

Partie II
Une démonstration probabiliste du théorème de Stone-Weierstrass

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit S_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et x, $x \in [0,1]$, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = \dfrac{S_n}{n}$.

(a) Déterminer $E(X_n)$ et $V(X_n)$ respectivement l'espérance et la variance de X_n.

(b) Justifier que, pour tout $\delta > 0$, $P(|X_n - x| \geq \delta) \leq \dfrac{1}{4n\delta^2}$.

2. On introduit la variable aléatoire $Y_n = f(X_n)$ et on pose pour tout $x \in [0,1]$, $C_n(f)(x) = E(Y_n)$. Pour la suite de cette question, on se donne un réel $\varepsilon > 0$.

(a) Vérifier que $x \mapsto C_n(f)(x)$ est une fonction polynomiale définie sur $[0,1]$.

(b) D'après le théorème de Heine, comme f est continue sur $[0,1]$, alors il existe $\beta > 0$ tel que, pour tout $(x_1, x_2) \in [0,1] \times [0,1]$, $|x_1 - x_2| \leq \beta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. (On ne vous demande pas de redémontrer ce résultat).

i. Montrer que $\left| \displaystyle\sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| \leq \beta} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) P\left(X_n = \frac{k}{n} \right) \right| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$

ii. Montrer que $\left| \displaystyle\sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| > \beta} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) P\left(X_n = \frac{k}{n} \right) \right| \leq \dfrac{M}{2n\beta^2}$, avec $M = \sup\limits_{t \in [0,1]} |f(t)|$.

(c) En déduire que la suite $(C_n(f))_{n \geq 1}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.