# Calcul différentiel

Tous les espaces vectoriels qu'on envisagera seront réels et de dimensions finies.

## I. Différentiabilité - Dérivabilité selon un vecteur

### 1) Dérivée selon un vecteur

Ici | E et F deux $\mathbb{R}$-ev de dim finies
| U ouvert de E.

**Déf 1 :** Soit $f : U \subset E \to F$.

Soient $a \in U$ et $v$ un vecteur non nul de E.

* On dit que $f$ est dérivable en $a$ selon le vecteur $v$ ssi l'application $t \in \mathbb{R} \longmapsto f(a+tv)$ est dérivable en $0$.

* Dans ce cas : $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(a+tv)-f(a)}{t}$ se note $D_v f(a)$ et s'appelle la dérivée de $f$ en $a$ selon $v$.

**NB** $\boxed{D_v f(a) \overset{\text{déf}}{=} \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t}}$

## 2) Dérivées partielles :

**Ici** $f : U \subset E \longrightarrow F$ ; $a \in U$
$B = (e_1, \dots, e_n)$ une base fixée de $E$.

Supposons que $f$ est dérivable en $a$ selon $e_i$ :

→ $D_{e_i} f(a)$ se note $D_i f(a)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

→ $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \in F$ et s'appelle la ième dérivée partielle de $f$ en $a$.

→ $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \overset{\text{déf}}{=} \lim_{t \to 0} \frac{f(a+te_i)-f(a)}{t}}$

---

**NB1** cas où $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$a = (a_1, \dots, a_n) \in U$ et $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Soit $i \in [\![1, n]\!]$

1) $f$ possède une dérivée partielle ième en $a$ ssi $t \longmapsto f(a_1, \dots, a_i+t, \dots, a_n)$ est dérivable en 0.

2) $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \overset{\text{déf}}{=} \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i+t, \dots a_n)-f(a)}{t}}$

**NB 2** Cas où $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, et $(a,b) \in U$

1/ $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a,b)$ $\left(\text{resp } \frac{\partial f}{\partial x_2}(a,b)\right)$ se note $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ $\left(\text{resp } \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)$.

2/ $$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \overset{\text{déf}}{=} \lim_{t \to 0} \frac{f(a+t,b) - f(a,b)}{t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \overset{\text{déf}}{=} \lim_{t \to 0} \frac{f(a,b+t) - f(a,b)}{t}$$

**Exemple** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Calculer, sous réserve d'existence, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

**Sol :** $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f\big((0,0)+t(1,0)\big) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(t,0)}{t} = 0$$

car $\forall t \neq 0 \;\; f(t,0) = \frac{t \times 0}{t^2+0} = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f\big((0,0)+t(0,1)\big) - f(0,0)}{t} \overset{\text{de m}}{=} 0$$

c/c : $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

## 3) Différentielle

Ici $f : U \subset E \longrightarrow F$

**Déf 1 :** Soit $a \in U$, $f$ est dite **différentiable en $a$** si et ssi il existe une application linéaire $\ell \in \mathcal{L}(E,F)$ tq :

$$\boxed{f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + \ell(h) + \|h\|\,\varepsilon(h)} \; ; \text{ où } \varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

**NB :**

1) On écrit aussi :

$$f(a+h) \underset{0}{=} f(a) + \ell(h) + o(h)$$

2) Ces deux écritures équivalentes s'appellent :

« Le développement limité de $f$ d'ordre 1 au voisinage de $a$ »

---

**Prop 2 :** On a **unicité** de l'application linéaire $\ell \in \mathcal{L}(E,F)$

**Démo :** Supp l'existence de deux applications linéaires $\ell \in \mathcal{L}(E,F)$ et $L \in \mathcal{L}(E,F)$ tq :

$$(*)\left\{\begin{array}{l} f(a+h) \underset{0}{=} f(a) + \ell(h) + \|h\|\,\varepsilon_1(h) \\ f(a+h) \underset{0}{=} f(a) + L(h) + \|h\|\,\varepsilon_2(h) \end{array}\right.$$

avec $\varepsilon_1(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ et $\varepsilon_2(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$

## Montrons que $\ell = L$ :

Soit alors $x \in E$, montrons que $L(x) = \ell(x)$.

De (*) on a :

$L(h) - \ell(h) \underset{h \to 0}{=} \|h\| \varepsilon_3(h)$ avec $\varepsilon_3(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$

$\Rightarrow L(tx) - \ell(tx) \underset{t \to 0}{=} \|tx\| \varepsilon_3(tx)$

$L(x) - \ell(x) \underset{t \to 0}{=} \underbrace{\frac{|t|}{t}}_{\text{bornée}} \|x\| \underbrace{\varepsilon_3(tx)}_{\to 0} \xrightarrow[t \to 0]{} 0$

Par passage à la limite $(t \to 0)$, on obtient

$\ell(x) = L(x)$ /

**Déf 3 :** Soit $f$ différentiable en $a \in U$.

L'application $\ell$ ci-dessus s'appelle la différentielle de $f$ en $a$ et se note $df(a)$.

**NB :**

1/ $df(a) \in \mathcal{L}(E, F)$

2/ $f(a+h) \underset{h \to 0}{=} f(a) + df(a)(h) + o(h)$

3/ $df(a)(h)$ se note aussi $df(a) \cdot h$

4/ Ainsi on a : $f(a+h) = f(a) + df(a) \cdot h + o(h)$

**Prop 4 :**

($f$ différentiable en $a$) $\Rightarrow$ ($f$ continue en $a$)

Démo : On a : $f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + df(a)(h) + \|h\| \cdot \varepsilon(h)$

Et on a : $\begin{cases} \lim\limits_{h\to 0} \|h\| \varepsilon(h) = 0 \\ \lim\limits_{h\to 0} df(a)(h) = df(a)(0) = 0 \end{cases}$

Car $df(a)$ est continue puisque linéaire et $E$ de dim finie.

D'où par passage à la limite on aura :

$\boxed{\lim\limits_{h\to 0} f(a+h) = f(a)}$, càd $f$ continue en $a$.

Prop 5 : Si $f$ est différentiable en $a$ alors $f$ est dérivable en $a$ selon tout vecteur $v$ de $E$, et on a

$$\boxed{D_v f(a) = df(a)(v)}$$

Démo : Supp que $f$ est différentiable en $a$

On a alors $f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + df(a)(h) + \|h\| \varepsilon(h)$

Soit $v \in E \setminus \{0\}$

Mq que $f$ est dérivable en $a$ selon $v$ et que $D_v f(a) = df(a)(v)$

On a $f(a+tv) \underset{t\to 0}{=} f(a) + df(a)(tv) + \|tv\| \varepsilon(tv)$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = \lim_{t\to 0} \left( df(a)(v) + \frac{|t|}{t} \underbrace{\varepsilon(tv) \cdot \|v\|}_{\to 0} \right)$$

$= df(a)(v)$.

D'où $f$ est dérivable en $a$ selon $v$ et on a :

$$D_v f(a) = df(a)(v)$$

**Déf 6 :** $f : U \subset E \to F$

1/ $f$ est différentiable sur $U$ ssi $f$ est différentiable en tout point de $U$.

2/ Supp que $f$ est différentiable sur $U$.

La différentielle de $f$ est l'application :

$$df : U \to \mathcal{L}(E,F)$$
$$a \mapsto df(a)$$

**Prop 7 :**

1/ Toute fonction constante $f$ est différentiable sur $U$ et on a : $\forall a \in U,\ df(a) = 0_{\mathcal{L}(E,F)}$

2/ Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ alors $f$ est différentiable sur $E$ et on a : $\forall a \in E,\ df(a) = f$

**Démo** En bref

1/ $f = c$

$$\underbrace{f(a+h)}_{=c} = \underbrace{f(a)}_{=c} + 0 + \|h\| \cdot 0$$

$\hookrightarrow \varepsilon(h) = 0$

$l(h) = 0$ ; $l$ l'applic lin nulle

$$\Rightarrow df(a) = 0$$

2) Soit $a \in E$

On a : $f(a+h) = f(a) + \underbrace{f(h)}_{\hookrightarrow df(a)=f} + \|h\| \cdot 0 \quad \varepsilon(h) = 0$

$f$ est différentiable en $a$ et $df(a) = f$.

Exemples rapides :

Les applications suivantes sont toutes différentiables (puisque linéaires)

1) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ : $(x,y) \longmapsto x$ et $(x,y) \longmapsto y$

2) $\forall i \in [\![1,n]\!]$ ; $(x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_i$ est diff sur $\mathbb{R}^n$.

3) $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!]$ : $A \to A_{ij}$ est diff sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4) En général :

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $E$

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, l'application $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \longmapsto x_i$

est différentiable sur $E$.

## 4) Lien entre différentiabilité et dérivées partielles

Prop 1 : $f : U \subset E \to F$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de $E$.

Si $f$ est différentiable sur $U$ alors les dérivées partielles de $f$ existent sur $U$ et on a :

$$\boxed{\forall i \in [\![1,n]\!],\ \forall a \in U ;\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = df(a)(e_i)}$$

Démo (En bref)

$$D_{e_i}f(a) \xrightarrow[\text{déjà vu}]{\text{existe}} df(a)(e_i)$$

$$D_{e_i}f(a) \overset{\text{déf}}{=} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

Prop 2 : Supp $f$ diff en $a$.

1) $df(a)(h) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ ; où $h = \sum_{i=1}^{n} h_i e_i$.

2) Le DL de $f$ en $a$ est :

$$f(a+h) \underset{h \to 0}{=} f(a) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + o(h)$$

Démo

1) $df(a)(h) = df(a)\left(\sum_{i=1}^{n} h_i e_i\right)$

$$= \sum_{i=1}^{n} h_i\, df(a)(e_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

## 5/ Cas d'une fonction vectorielle à variable réelle

Prop 1 : $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow F$, où $I$ un intervalle ouvert sur $\mathbb{R}$.

Soit $a \in I$. On a :

1) ($f$ différentiable en $a$) $\Longleftrightarrow$ ($f$ dérivable en $a$)

2) Dans ce cas, on a : $f'(a) = df(a)(1)$

Démo :

"$\Longrightarrow$" On a $f(a+h) \underset{0}{=} f(a) + df(a)(h) + |h|\varepsilon(h)$ ; avec $\varepsilon(h) \xrightarrow[0]{} 0$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \underset{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}{=} df(a)(1) + \underbrace{\frac{|h|}{h}}_{\text{bornée}} \cdot \underbrace{\varepsilon(h)}_{\to 0}$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = df(a).(1)$$

D'où $f$ est dérivable en $a$ et $f'(a) = df(a).(1)$

"$\Longleftarrow$" Supp $f$ dérivable en $a$ :

On a $\displaystyle\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)\right) = 0$

Posons $\begin{cases} \varepsilon(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a) & \text{si } h \neq 0 \\ \varepsilon(0) = 0 \end{cases}$

On a ainsi :

$$\begin{cases} f(a+h) = f(a) + \underbrace{h.f'(a)}_{=\ell(h)} + h\,\varepsilon(h) \\ \text{et } \varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0 \end{cases}$$

Or $\ell \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, F)$ , où $\ell : h \mapsto h.f'(a)$

Alors $f$ est diff en $a$ et $df(a) = \ell$

* En particulier $df(a)(1) = \ell(1) = f'(a)$

**Réflexe :** Si le départ c'est $\mathbb{R}$, alors (dérivable) $\Leftrightarrow$ (différentiable)

**Par exemple :**
$\cos$ et $\sin$ sont différentiables sur $\mathbb{R}$.

## 6/ Matrice jacobienne

**Ici**

→ $f : U \subset E \to F$ et $a \in U$.

→ $B = (e_1, \dots, e_n)$ base de $E$.

→ $S = (s_1, \dots, s_m)$ base de $F$.

→ $f_1, \dots, f_m$ sont les applications composantes de $f$.

Càd : $f = \sum_{i=1}^{m} f_i s_i$.

→ $\forall\, 1 \leq i \leq m$, $f_i : U \subset E \to \mathbb{R}$

**Prop 1**

1) ($f$ différentiable en $a$) $\Leftrightarrow$ (Toutes ses fonctions composantes sont différ en $a$)

2) Dans ce cas on a : $df(a) = \sum_{i=1}^{m} df_i(a) \cdot s_i$

C.à.d. $\boxed{\forall h \in E \quad df(a)(h) = \sum_{i=1}^{m} df_i(a)(h) \cdot s_i}$

## Méditation

$\rightsquigarrow \quad f = \sum_{i=1}^{m} f_i \, s_i$

$\rightsquigarrow \quad \underbrace{df(a)}_{\in \mathcal{L}(E,F)} = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{df_i(a)}_{\in \mathcal{L}(E,\mathbb{R})} \cdot \underbrace{s_i}_{\in F}$

$\rightsquigarrow \quad \forall h \in E, \quad \underbrace{df(a)(h)}_{\in F} = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\underbrace{df_i(a)(h)}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{s_i}_{\in F}}_{\in F}$

## Démo (de la prop 1)

$$f = \sum_{i=1}^{m} f_i \, s_i$$

"$\Rightarrow$" $f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + \|h\| \, \varepsilon(h)$

Posons $\varepsilon = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i \, s_i$

$$\sum_{i=1}^{m} f_i(a+h) \cdot s_i = \sum_{i=1}^{m} f_i(a) \cdot s_i + \sum_{i=1}^{m} L_i(h) \, s_i + \sum_{i=1}^{m} \|h\| \, \varepsilon_i(h) \, s_i$$

où $df(a) = \sum_{i=1}^{m} L_i \, s_i$ (donc $\forall i, \; L_i \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$)

D'où $\left(\forall i \in [\![1,n]\!],\ f_i(a+h) = f_i(a) + L_i(h) + \|h\| \underbrace{\varepsilon_i(h)}_{\xrightarrow[h\to 0]{} 0}\right.$
et $\left. L_i \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R}) \right)$

Ainsi $\left(\forall i \in [\![1,n]\!],\ f_i\right.$ est différentiable en $a$ et $\left. df_i(a) = L_i \right)$.

$df(a) = \sum_{i=1}^{n} L_i s_i$ devient $df(a) = \sum_{i=1}^{n} df_i(a) \cdot s_i$

" $\Leftarrow$ " en exo chez-vous.

## Déf 2 : La matrice Jacobienne de $f$ en $a$

Supposons que $f$ est différentiable en $a$.

La matrice Jacobienne de $f$ en $a$ est $Jf(a)$ définie par :

$$Jf(a) = \underset{B,S}{\mathrm{mat}}(df(a))$$

## Prop 3

$$Jf(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

## Démo

$B = (e_1, \dots, e_n)$ base de $E$.

$S = (s_1, \dots, s_m)$ base de $F$.

$df(a) \in \mathcal{L}(E,F)$, et donc $\underset{B,S}{\mathrm{mat}}(df(a)) \in M_{mn}(\mathbb{R})$.

Il s'agit de montrer que :

$$\forall j \in [\![1,n]\!],\ df(a)(e_j) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\, S_i$$

$$\begin{array}{c} j^{\text{ème}} \\ \text{colonne} \end{array} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(a) \end{pmatrix}$$

D'après la (Prop 1), on a :

$$df(a) = \sum_{i=1}^{m} df_i(a)\, S_i \qquad \text{Car} \left( f = \sum_{i=1}^{m} f_i . S_i \right)$$

$$\Longrightarrow df(a)(e_j) = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{df_i(a)(e_j)}_{= \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)} . S_i$$

fin démo

---

**NB :** Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, la matrice Jacobienne est par convention relativement aux bases canoniques.

---

**Exemples :** Considérons les applications suivantes :

1) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ; $f(x,y) = (xy\,,\, x^2+y^2\,,\, x-y)$

2) $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ; $g(r,\theta) = (r\cos\theta\,,\, r\sin\theta)$

On admet pour le moment que $f$ et $g$ sont différentiables sur $\mathbb{R}^2$.

Calculer $J_f(x,y)$ et $J_g(r,\theta)$.

---

**Sol**

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \ ;\ f(x,y) = (\underbrace{xy}_{f_1(x,y)}\,,\, \underbrace{x^2+y^2}_{f_2(x,y)}\,,\, \underbrace{x-y}_{f_3(x,y)})$$

Notons $f=(f_1, f_2, f_3)$ et $g=(g_1, g_2)$ $g_2(r,\theta)=r\sin\theta$

$g_1(r,\theta)=r\cos\theta$

$$Jf(x,y)=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ 2x & 2y \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Jg(r,\theta)=\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial r}(r,\theta) & \frac{\partial g_1}{\partial \theta}(r,\theta) \\ \frac{\partial g_2}{\partial r}(r,\theta) & \frac{\partial g_2}{\partial \theta}(r,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

## 7/ Opération sur les applications différentielles.

### a/ combinaison Linéaire :

**Prop ①** $f$ et $g : U \subset E \to F$, $a \in U$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1/ Si $f$ et $g$ sont différentiables en $a$ Alors $\lambda f+g$ l'est aussi et on a : $d(\lambda f+g)(a)=\lambda df(a)+dg(a)$

2/ Tout combinaison Linéaire d'applications différentiables sur $U$ est différentiable sur $U$ et on a :

$$d\left(\sum_i \lambda_i f_i\right)=\sum_i \lambda_i df_i$$

Démo :

2) vient de 1)

Démo de 1°)

On a : $f(a+h) \underset{a}{=} f(a) + df(a)\cdot h + o(h)$

$g(a+h) \underset{a}{=} g(a) + dg(a)\cdot h + o(h)$

Alors :

$$(\lambda f+g)(a+h) = (\lambda f+g)(a) + \underbrace{(\lambda df(a) + dg(a))}_{\in \mathcal{L}(E,F)}(h) + o(h)$$

D'où $(\lambda f+g)$ est diff en a et on a :

$$d(\lambda f+g)(a) = \lambda\, df(a) + dg(a) \qquad \square$$

## b/ Produit :

Ici : $f : U \subset E \longrightarrow F$

$g : U \subset E \longrightarrow G$ ; $a \in U$

$B : F \times G \longrightarrow H$ une application bilinéaire.

$B(f,g)$ est ainsi définie par :

$$B(f,g) : U \subset E \longrightarrow H$$
$$x \longmapsto B(\underset{\in F}{f(x)}, \underset{\in G}{g(x)}) \in H$$

**Prop :** Si $f$ et $g$ sont differentiables sur $U$

Alors $B(f,g)$ l'est aussi et on a :

$$\forall a \in U,\ \underbrace{dB(f,g)(a)}_{\in \mathcal{L}(E,F)} = B(\underbrace{df(a)}_{\in \mathcal{L}(E,F)}, g(a)) + B(f(a), \underbrace{dg(a)}_{\in \mathcal{L}(E,F)})$$

---

**Càd**

$$\forall a \in U, \forall h \in E ;\ \underbrace{dB(f,g)(a)\cdot h}_{\in H} = \underbrace{B(\underbrace{df(a)h}_{\in F}, \underbrace{g(a)}_{\in G})}_{\in H} + \underbrace{B(\underbrace{f(a)}_{\in F}, \underbrace{dg(a)h}_{\in G})}_{\in H}$$

---

**Démo :** On a :
$$\begin{cases} f(a+h) \underset{0}{=} f(a) + df(a)\cdot h + \|h\| \varepsilon_1(h) \\ g(a+h) \underset{0}{=} g(a) + dg(a)\cdot h + \|h\| \varepsilon_2(h) \end{cases}$$

$$B(f,g)(a+h) = B(f(a+h), g(a+h))$$
$$= B(f(a) + df(a)\cdot h + \|h\|\cdot\varepsilon_1(h),\ g(a) + dg(a)\cdot h + \|h\|\varepsilon_2(h))$$
$$= B(f(a), g(a)) + \underbrace{B(f(a), dg(a)h) + B(df(a)h, g(a))}_{= L(h)\ ;\ \text{on a } L \in \mathcal{L}(E,H)}$$
$$+ \|h\| \underbrace{B(f(a), \varepsilon_2 \|h\|)}_{\xrightarrow[h\to 0]{} 0} + \underbrace{B(df(a)\cdot h, dg(a)h)}_{= o(h),\ \text{vérifiez-le}}$$
$$+ \|h\| \underbrace{B(df(a)\cdot h, \varepsilon_2(h))}_{\longrightarrow 0} + \|h\| \underbrace{B(\varepsilon_1(h), g(a))}_{\longrightarrow 0}$$

$+ \|h\| \underbrace{B(\varepsilon_1(h), dg(a).h)}_{\xrightarrow[h\to 0]{} 0} + \|h\| \underbrace{B(\varepsilon_1(h), \|h\| \varepsilon_2(h))}_{\xrightarrow[h\to 0]{} 0}$

Et c'est fini.

fin démo

**Corollaire 21 :** Soit $\mathcal{A}$ une algèbre normée de dim finie.
$f : \mathcal{U} \subset E \longrightarrow \mathcal{A}$ et $g : \mathcal{U} \subset E \longrightarrow \mathcal{A}$

* Si $f$ et $g$ sont différentiables sur $\mathcal{U}$. Alors $f \times g$ l'est aussi, et on a :

$$\forall a \in \mathcal{U},\ d(f \times g)(a) = df(a) \times g(a) + f(a) \times dg(a)$$

Càd :

$$\forall a \in \mathcal{U}, \forall h \in E\ d(f.g)(a)(h) = df(a)(h).g(a) + f(a).dg(a)(h)$$

**Démo :** C'est prop ① pour $B : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$, $(x, y) \longmapsto x.y$

**NB :** Penser aux cas d'algèbres $\mathbb{R}$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exemple :

1/ $(x,y) \longmapsto x.y$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$

comme produit d'applic diff.

2/ $(x,y,z) \longmapsto x^2y - 3zx$ diff sur $\mathbb{R}^2$.

En général on a :

Coroll 3 : Toute fonction polynomiale en les composantes des vecteurs est différentiable.

Exemples :

1/ det est diff sur $M_n(\mathbb{R})$, car polynomiale en les cordonnées de $A$.

2/ L'application $\begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & com(A) \end{array}$

est diff sur $M_n(\mathbb{R})$ car toutes ses fonctions composantes sont diff puisqu'elles sont polynomiale en les coordonnées de $A$.

# Ex

Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$\qquad\qquad A \longmapsto A^2 = f(A)$

1) Montrer via la définition que $f$ est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et préciser $df(A)(H)$, pour tout $A$ et $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

2) Même question via le produit de fonctions différentiables à but dans une algèbre.

---

## Sol Ex 3

1) Mque $f$ est diff sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ via la déf

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Mque $f$ diff en $A$.

Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$f(A+H) = (A+H)^2 = A^2 + AH + HA + H^2$$

D'où $\begin{cases} f(A+H) = f(A) + L(H) + H^2 \\ \text{où } L(H) = AH + HA \end{cases}$

Il est clair que $L \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

Pour conclure que $f$ est diff en $A$, il reste à vérifier que $H^2 \underset{H \to 0}{=} o(H)$ en effet :

Il suffit de mque $\lim\limits_{H \to 0} \frac{1}{\|H\|} H^2 = 0$ ; càd $\lim\limits_{H \to 0} \left\| \frac{1}{\|H\|} . H^2 \right\| = 0$

On travaillera avec une norme d'algèbre sur $M_n(\mathbb{R})$ (Càd vérifiant : $\forall A, B$ ; $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$)

Ainsi $\left\| \frac{H^2}{\|H\|} \right\| = \frac{\|H^2\|}{\|H\|} \leq \frac{\|H\|^2}{\|H\|} = \|H\| \underset{H \to 0}{\longrightarrow} 0$

d'où $\lim\limits_{H \to 0} \frac{H^2}{\|H\|} = 0$

Enfin $f$ est diff en $A$, et on a $df(A) = L$.

Càd $\forall H \in M_n(\mathbb{R})$, $df(A)(H) = HA + AH$ $\square$

---

2) On a $f = h \times h$ ; où $h = id_{M_n(\mathbb{R})}$.

$h$ est différentiable sur $M_n(\mathbb{R})$, Car linéaire, donc $h \times h = f$ l'est aussi.

Soient maintenant $A$ et $H \in M_n(\mathbb{R})$.

$df(A)(H) = ?$

On a :

$df(A) = d(h \cdot h)(A)$

$= \underbrace{dh(A)}_{\substack{= h \\ \text{car } h \text{ linéaire}}} \cdot \underbrace{h(A)}_{=A} + \underbrace{h(A)}_{=A} \cdot \underbrace{dh(A)}_{= h}$

$\Rightarrow df(A) = h \cdot A + A \cdot h$

$$\Rightarrow \quad df(A)(H) = \underbrace{h(H)}_{=H}.A + A.\underbrace{h(H)}_{=H}$$

C.à.d $\forall H \in M_n(\mathbb{R}),\ df(A)(H) = HA + AH$ $\square$

« Expression trouvée ci-dessus »

## c/ Composée :

**Prop 1** $f : U \subset E \longrightarrow F$ et $g : W \subset F \longrightarrow G$ avec $f(U) \subset W$

Si ($f$ diff sur $U$ et $g$ diff sur $W$) Alors $g \circ f$ est différentiable sur $U$ et on a :

$$\forall a \in U,\ d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$$

**Démo :** en exo :

**Ex 1**

$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ; $g(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$

Justifier que $g$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$

## Solution

$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 ;\ g(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$

Il suffit de justifier que ses fonctions composantes :

$g_1 : (r,\theta) \longmapsto r\cos\theta$ et $g_2 : (r,\theta) \longmapsto r\sin\theta$

sont différentiables sur $\mathbb{R}^2$.

$g_1$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ car c'est le produit des deux fonctions différentiables $(r,\theta) \longmapsto r$ et $(r,\theta) \longmapsto \cos\theta$ :

$(r,\theta) \longmapsto r$ car linéaire (ou polynomiale).

$(r,\theta) \longmapsto \cos\theta$ car composée de $(r,\theta) \longmapsto \theta$ et $\theta \longmapsto \cos\theta$, toutes deux différentiables ; la 1ère linéaire (ou polynomiale) et la 2ème est dérivable sur $\mathbb{R}$. $\square$

## Ex2

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 ;\ f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2+1}$

Justifier que $f$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

Sol : (Un exo chez-vous)

## Corollaire 2 :

$f : U \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ ; $\varphi : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ; $f(U) \subset I$

Si $\begin{cases} f \text{ diff sur } U \\ \varphi \text{ dérivable sur } I \end{cases}$ Alors $\varphi \circ f$ est diff sur $U$

Et que : $\forall a \in U$, $d(\varphi \circ f)(a) = \varphi'(f(a)) \cdot df(a)$

C.à.d :

$$\forall a \in U, \forall h \in E ; d(\varphi \circ f)(a)(h) = \varphi'(f(a)) \cdot df(a)(h)$$

Démo :

$\rightarrow$ $\varphi \circ f$ diff comme composée de deux applic diff.

$\rightarrow$ $d(\varphi \circ f)(a) = d\varphi(f(a)) \circ df(a)$

$$\Longrightarrow d(\varphi \circ f)(a)(h) = \underbrace{d\varphi(f(a))}_{\in \mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})}\left(\overbrace{df(a)(h)}^{\in \mathbb{R}}\right)$$

$$= df(a)(h) \cdot \underbrace{d\varphi(f(a))(1)}_{= \varphi'(f(a))}$$

Corollaire 3 : $\begin{cases} \gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow E \\ f : U \subset E \longrightarrow F \end{cases}$, avec $\gamma(I) \subset U$.

Si $\begin{cases} \gamma \text{ dérivable sur } I \\ f \text{ diff sur } U \end{cases}$ Alors $f \circ \gamma$ est dérivable sur $I$

Et on a : $\forall t \in I$ ; $\underbrace{(f\circ\gamma)'(t)}_{\in F} = \underbrace{\underbrace{df(\gamma(t))}_{\in \mathcal{L}(E,F)} \underbrace{(\gamma'(t))}_{\in E}}_{\in F}$

---

Exemple : $f : E \longrightarrow F$ diff sur $E$.

$x$ et $h$ deux vecteurs fixés de $E$.

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow F$$
$$t \longmapsto f(x+th)$$

Justifier que $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et expliciter $g'(t)$.

Sol : $g = f \circ \gamma$ où $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow E$
$t \longmapsto x + th$

① On a $\begin{cases} f \text{ diff sur } E \\ \gamma \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow (f \circ \gamma) = g$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

② $\forall t \in \mathbb{R}$, on a $g'(t) = (f \circ \gamma)'(t)$
$$= df(\gamma(t))(\gamma'(t))$$
$$= df(x + th)(h)$$

Prop

Si
- $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ diff sur $\mathbb{R}^n$
- $\forall\, 1 \leq i \leq n$, $u_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$.
- $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
  $t \longmapsto f(u_1(t), \dots, u_n(t)) \in \mathbb{R}$

Alors
i) $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
ii) $\forall t \in \mathbb{R}$, on a :
$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(u_1(t), \dots, u_n(t))\, u_1'(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(u_1(t), \dots, u_n(t))\, u_n'(t)$$

NB : On retrouvera cette expression via la règle de la chaîne.

## Exemple express :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ ; $(x,y) \longmapsto f(x,y)$ une applic diff sur $\mathbb{R}^2$.

L'application $t \longmapsto f(sh(t), e^{2t})$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\left(f(sh(t), e^{2t})\right)' = \frac{\partial f}{\partial x}(sh(t), e^{2t})\, ch(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(sh(t), e^{2t}) \cdot 2e^{2t}$$

## 8°) Dérivées partielles d'une composée d'applications

### Règle de la Chaîne (Chain rule)

**Ici :**

1) $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable sur $\Omega$.
   (On parlera de $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ; $1 \leq i \leq n$)
2) $\forall 1 \leq i \leq n$, $x_i : \Omega' \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ diff sur $\Omega'$.
   (On parlera des $\frac{\partial x_i}{\partial t_j}$ ; $1 \leq j \leq m$)
3) $\forall (t_1, \dots, t_m) \in \Omega'$, $(x_1(t_1, \dots, t_m), \dots, x_n(t_1, \dots, t_m)) \in \Omega$.

Ainsi, l'application suivante est bien définie :

$$\begin{array}{rcl} \Omega' \subset \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (t_1, \dots, t_m) & \longmapsto & f(x_1(t_1, \dots, t_m), \dots, x_n(t_1, \dots, t_m)) \end{array}$$

En plus, elle est différentiable sur $\Omega'$ comme composée des deux applic différentiables :

$$x : (t_1, \dots, t_m) \mapsto (x_1(t_1, \dots, t_m), \dots, x_n(t_1, \dots, t_m)) \text{ et } f.$$

**Prop** (Règle de la chaîne)

Soit $(t_1, \dots, t_m) \in \Omega'$. Soit $1 \leq i \leq m$. On a :

$$\frac{\partial}{\partial t_i}\Big(f\big(x_1(t_1, \dots, t_m), \dots, x_n(t_1, \dots, t_m)\big)\Big) =$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\big(x_1(t_1, \dots, t_m), \dots, x_n(t_1, \dots, t_m)\big) \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_i}(t_1, \dots, t_m) + \dots +$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_n}\big(x_1(t_1, \dots, t_m), \dots, x_n(t_1, \dots, t_m)\big) \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_i}(t_1, \dots, t_m)$$

**Càd**

$$\frac{\partial}{\partial t_i}\Big(f\big(x_1(t_1, \dots, t_m), \dots, x_n(t_1, \dots, t_m)\big)\Big) =$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\big(x_1(t_1, \dots, t_m), \dots, x_n(t_1, \dots, t_m)\big) \cdot \frac{\partial x_j}{\partial t_i}(t_1, \dots, t_m)$$

## Remarque pratique

On retient cette égalité sous la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t_i}\left(f(x_1,\dots,x_n)\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial t_i}$$

règle de la chaîne

## Exemple 1 :

Soit $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto f(x,y) \end{array}\right.$ différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

Posons $\left\{ \begin{array}{l} x = u+v \\ y = u-v \end{array}\right.$.

Ainsi $f(x,y) = f(u+v,\, u-v) = g(u,v)$.

Exprimer $\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)$ et $\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

## Solution

$f(x,y) = g(u,v)$

$\left\{ \begin{array}{l} x = u+v \\ y = u-v \end{array}\right.$

1) $\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial}{\partial u}\left(f(x,y)\right)$

Règle de la chaîne

$$= \frac{\partial f}{\partial x} \times \underbrace{\frac{\partial x}{\partial u}}_{=1} + \frac{\partial f}{\partial y} \times \underbrace{\frac{\partial y}{\partial u}}_{=1}$$

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}$$

2) On trouve de même :

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}$$

---

Exemple 2 :

Soit $f : \begin{array}{|l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto f(x,y) \end{array}$ différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

Posons $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$ (Chang de var : coord polaires)

Ainsi $f(x,y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = g(r,\theta)$.

Montrer que : $\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin\theta \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + r\cos\theta \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{cases}$

---

## Solution

$$f(x,y) = g(r,\theta).$$

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$$

1) $\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ ?

$\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \frac{\partial}{\partial r}\left(f(x,y)\right)$ $\qquad f(x,y) = g(r,\theta).$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} \times \underbrace{\frac{\partial x}{\partial r}}_{=\cos\theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \times \underbrace{\frac{\partial y}{\partial r}}_{=\sin\theta}$$ (règle de la chaîne)

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}$$

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$$

2) Idem.

---

## II.) Cas des applications numériques

Ici $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est un espace euclidien de dimension $n \geq 1$.

### 1) Gradient

**Rappel :** $\forall \varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}), \exists! u \in E, \varphi = \langle u | \cdot \rangle$

C.à.d $(\forall \varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}), \exists! u \in E, \forall x \in E, \varphi(x) = \langle u | x \rangle)$

**Prop et déf 1**

Soit $a \in \Omega$. Soit $f : \Omega \subset E \to \mathbb{R}$ différentiable en $a$.

1) Il existe un unique vecteur, noté $\nabla f(a)$, tel que :

$$\boxed{df(a) = \langle \nabla f(a), \cdot \rangle}$$

2) $\nabla f(a)$ s'appelle le gradient de $f$ en $a$.

**NB :** 1) $\forall x \in E, \; df(a)(x) = \langle \nabla f(a), x \rangle$

2) $\nabla f(a)$ se note aussi $\text{grad} f(a)$.

**Prop 2** Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une bon de $E$. Soit $a \in \Omega$.

Soit $f : \Omega \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable en $a$.

$$\nabla f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot e_i$$

**Rappel :** $\forall x \in E, \ x = \sum_{i=1}^{n} \langle x | e_i \rangle e_i$

où $(e_i)$ bon de $E$

**Démo de prop 2**

$$\nabla f(a) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\langle \nabla f(a) | e_i \rangle}_{= df(a)(e_i)} e_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(df(a)(e_i)\right)}_{= \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)} \cdot e_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) e_i$$

**Cas particulier**

1) Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\nabla f(a) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$$

2) Dans $\mathbb{R}^2$, on a :

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \ \nabla f(\alpha, \beta) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha, \beta), \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha, \beta) \right)$$

**Prop 3** Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une bon de $E$. Soit $a \in \Omega$.

Soit $f : \Omega \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable en $a$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) $df(a) = 0$

2) $\nabla f(a) = 0$

3) $\forall 1 \leq i \leq n, \ \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$

**NB**

Soit $f : \Omega \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable en $a$.

Le DL d'ordre 1 de $f$ en $a$ est :

$$f(a+h) \underset{h \to 0}{=} f(a) + \langle \nabla f(a) | h \rangle + o(h)$$

## 2) Points Critiques — Extremums globaux

**Déf 1** $f : \Omega \subset E \to \mathbb{R}$ diff en $a \in \Omega$.

$a$ est dit point critique de $f$ si et ssi $df(a) = 0$.

**NB :** Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) $a$ point critique de $f$

2) $df(a) = 0$

3) $\nabla f(a) = 0$

4) $\forall 1 \leq i \leq n, \ \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$

## Exercice d'application

Dans chacun des cas suivants, déterminer les points critiques de $f$.

1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ (x,y) \mapsto x^2 + y^2 + xy + 1$

2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ (x,y) \mapsto x^2 + y^2 - 4xy - 1$

3) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ (x,y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$

**NB :** Pour $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, on a :

$$\left((x,y) \text{ point critique de } f\right) \Leftrightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0\right)$$

## Solution

D'abord, $f$ est dans chacun des cas différentiable sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynomiale.

1) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$(x,y) \text{ point critique de } f \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x+y=0 \\ x+2y=0 \end{cases}$$

⚠

$$\iff (x,y)=(0,0) \quad \left(\text{système de Cramer homogène ; } \Delta = 3 \neq 0\right)$$

C/C : $(0,0)$ est l'unique point critique de $f$.

2) Pareil à 1)

3) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$(x,y) \text{ point critique de } f \iff \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2=y \\ y^2-x=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2=y \\ x^4-x=0 \end{cases}$$

**Rappel**

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$x^{2n+1}=1 \iff x=1$

$x^{2n}=1 \iff x=\pm 1$

$$\iff \begin{cases} x^2=y \\ x=0 \text{ ou } x^3=1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2=y \\ x=0 \text{ ou } x=1 \end{cases}$$

$$\iff (x,y)=(0,0) \text{ ou } (x,y)=(1,1)$$

C/C : $(0,0)$ et $(1,1)$ sont les points critiques de $f$

**Déf 2** $f : \Omega \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \Omega$.

1) i) $f$ admet un maximum global en $a$ si et seulement si :

$$\forall x \in \Omega, \ f(x) \leq f(a)$$

ii) $f$ admet un minimum global en $a$ si et seulement si :

$$\forall x \in \Omega, \ f(x) \geq f(a)$$

2) i) $f$ admet un maximum local en $a$ si et seulement si :

$$\exists r > 0, \ \forall x \in \Omega \cap B(a,r), \ f(x) \leq f(a)$$

ii) $f$ admet un minimum local en $a$ si et seulement si :

$$\exists r > 0, \ \forall x \in \Omega \cap B(a,r), \ f(x) \geq f(a)$$

3) i) $f$ admet un extremum local en $a$ si et seulement si $f$ admet un <u>maximum</u> ou <u>minimum local</u> en $a$.

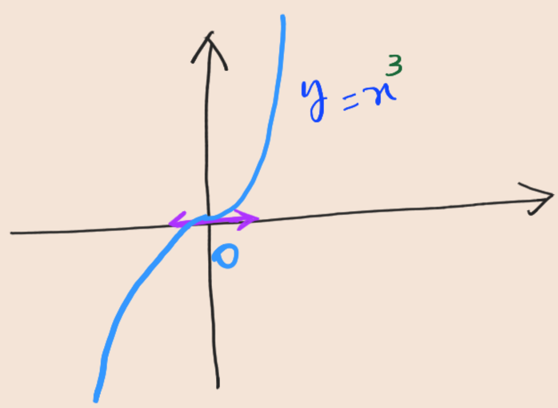
ii) Idem pour extremum global en $a$.

**NB :** Si on parle de maximum tout court, on désigne maximum global.
De même pour minimum ou extremum.

**Prop 3** $f : \Omega \subset E \to \mathbb{R}$ diff en $a \in \Omega$.
Si $f$ admet un extremum local en $a$ alors $a$ est un point critique de $f$.

**NB**
1) C'est aussi vrai pour les extremums globaux.
2) La réciproque est en général fausse.

Contre-exemple
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} ; x \mapsto x^3$ et $a = 0$.




**Démo de la prop 3**
Supposons, par exemple, que $f$ admet maximum local en $a$.
Soit alors $r > 0$ tel que : $\left(\forall x \in B(a,r) \cap \Omega, \ f(x) \leq f(a)\right)$

Mq que $df(a) = 0$.

Soit $h \in E \setminus \{0\}$. Mq que $df(a)(h)=0$ :

On a :

$$df(a)(h) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t} \quad (\text{c'est } D_h f(a))$$

Et pour $t$ voisin de $0$, on a $(f(a+th) - f(a) \leq 0)$

D'où
$$\begin{cases} \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{f(a+th) - f(a)}{t} \leq 0 \\ \\ \lim\limits_{t \to 0^-} \dfrac{f(a+th) - f(a)}{t} \geq 0 \end{cases}$$

Enfin $df(a).h = 0$

---

## Remarque pratique

Grâce à la (prop3), pour chercher les extremums locaux ou globaux, on les cherche parmi les points critiques.

---

## Exercice d'application

Reprenons les fonctions ci-dessus :

1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x^2 + y^2 + xy + 1$

2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x^2 + y^2 - 4xy - 1$

3) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$

Pour chacune d'entre elles, déterminer les éventuels extremums globaux.

---

Solution :

1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x^2+y^2+xy+1$.

$(0,0)$ est l'unique point critique de $f$.

Examinons si $(0,0)$ est un maximum ou minimum.

Pour cela, on examine le signe de $\left(f(x,y) - f(0,0)\right)$ :

$\rightsquigarrow$ Si $\left(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \; f(x,y) - f(0,0) \geqslant 0\right)$, alors $(0,0)$ est un minimum.

$\rightsquigarrow$ Si $\left(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \; f(x,y) - f(0,0) \leqslant 0\right)$, alors $(0,0)$ est un maximum.

$\rightsquigarrow$ S'il existe $(x_0,y_0)$ et $(x_1,y_1) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\begin{cases} f(x_0,y_0) - f(0,0) > 0 \\ f(x_1,y_1) - f(0,0) < 0 \end{cases}$$

alors $(0,0)$ n'est ni maximum ni minimum de $f$.

On a : $\left(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \; f(x,y) - f(0,0) = x^2+y^2+xy \geqslant 0\right)$

via $\Delta$ par exemple ; (en fixant $y \in \mathbb{R}$) $\left(\Delta = -3y^2 \leqslant 0 \Rightarrow \text{du signe de } a = 1\right.$

C/c : $(0,0)$ est un minimum global de $f$.

Piste 2

$$y^2+xy+x^2 = y^2 + 2y \cdot \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + x^2$$
$$= \left(y+\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{3x^2}{4} \geqslant 0$$

2) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x^2+y^2-4xy-1$

$(0,0)$ l'unique point critique de $f$.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y)-f(0,0) = x^2+y^2-4xy$

On a $\begin{cases} f(1,0)-f(0,0) = 1 > 0 \\ f(1,1)-f(0,0) = -2 < 0 \end{cases}$

D'où $(0,0)$ n'est ni maximum ni minimum de $f$.

C/c : $f$ n'a aucun extremum

3) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x^3+y^3-3xy$

$(0,0)$ et $(1,1)$ les points critiques de $f$.

i) Pour $(0,0)$

On a : $\left(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y)-f(0,0) = x^3+y^3-3xy\right)$

et $\begin{cases} f(1,1)-f(0,0) = -1 < 0 \\ f(1,0)-f(0,0) = 1 > 0 \end{cases}$

D'où $f$ ne possède pas en $(0,0)$ un extremum global.

ii) Pour $(1,1)$

On procède de même et on trouve que $f$ ne possède pas aussi en $(1,1)$ un extremum.

C/c : $f$ n'a aucun extremum

## III) Fonctions de Classe $C^1$ - Équations aux dérivées partielles premières

### 1) Fonctions de classe $C^1$

**Déf 1** $f : \Omega \subset E \to F$.

$f$ est dite de classe $C^1$ sur $\Omega$ si et ssi $f$ est différentiable sur $\Omega$ et que sa différentielle $df$ est continue sur $\Omega$.

**Exemples**

1) Toute fonction constante est de classe $C^1$.
2) Toute application linéaire est de classe $C^1$.

**Démo (en bref)**

1) $df = 0 \Rightarrow df$ continue

2) $(\forall a \in E,\ df(a) = f) \Rightarrow df$ constante
$\Rightarrow df$ continue

**Prop 2** Soit $f : \Omega \subset E \to F$.

$f$ est de classe $C^1$ sur $\Omega$ si et ssi toutes ses dérivées partielles existent sur $\Omega$ et y sont continues.

**NB**

1) Les résultats relativement aux opérations sur les fonctions différentiables valent aussi pour les fonctions de classe $C^1$ (composée, combinaison linéaire, produit ...)

S 2) Toute fonction polynomiale en les coordonnées est de classe $C^1$.

Prop 3

Hypothèses

1) $f : \Omega \subset E \longrightarrow F$ de classe $C^1$ sur $\Omega$.

2) $a, b \in \Omega$

3) $\gamma : [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R} \to E$, un arc de classe $C^1$ inscrit dans $\Omega$ et vérifiant $\gamma(\alpha) = a$ et $\gamma(\beta) = b$.

Conclusion

$$\boxed{\int_\alpha^\beta df(\gamma(t))(\gamma'(t))\,dt = f(b) - f(a)}$$

Démo

$f \circ \gamma$ est de classe $C^1$, comme composée de deux applic de classes $C^1$.

Et on a $df(\gamma(t)).\gamma'(t) = (f \circ \gamma)'(t)$

$$\Rightarrow \int_\alpha^\beta df(\gamma(t)).\gamma'(t)\,dt = \Big[f \circ \gamma\Big]_\alpha^\beta$$

$$= f(\gamma(\beta)) - f(\gamma(\alpha))$$

$$= f(b) - f(a)$$

**Corollaire 4** Soit $f : \Omega \subset E \longrightarrow F$ de classe $C^1$, où $\Omega$ un ouvert connexe par arcs de $E$. On a :

$$\boxed{f \text{ est constante} \iff df = 0}$$

**Démo** (Exigible pour $\Omega$ convexe)

Supposons que $\Omega$ est ouvert convexe de $E$.

($\Longrightarrow$) Déjà vue.

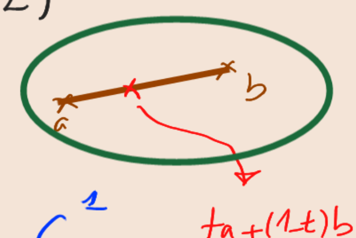
($\Longleftarrow$) Supp que $df = 0$.

Mq que $f$ est constante sur $\Omega$.

Soient alors $a$ et $b \in \Omega$. Mq que $f(a) = f(b)$.

On a : $(\forall t \in [0,1],\ ta + (1-t)b \in \Omega)$

car $\Omega$ convexe.




Posons $\gamma(t) = ta + (1-t)b$

On a : $\gamma : [0,1] \longrightarrow \Omega$ de classe $C^1$.

D'où $\displaystyle\int_0^1 \underbrace{df(\gamma(t))}_{=0} \cdot \gamma'(t)\, dt = \underbrace{f(\gamma(1))}_{=f(a)} - \underbrace{f(\gamma(0))}_{=f(b)}$

$\Longrightarrow$ $f(a) = f(b)$

## 2°) Les équations aux dérivées partielles du premier ordre

**Prop 1** $I$ et $J$ intervalles de $\mathbb{R}$.

Soit $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ de Classe $C^1$

La **solution générale** de l'EDP $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ est

$$f(x,y) = C(y)$$

où $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$.

$\rightsquigarrow$ Idem pour l'EDP $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$.

**Exemples** Résoudre les EDP suivantes :

1) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x y^2 \ ; \ (x,y) \in \mathbb{R}^2$

2) $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = y f(x,y) \ ; \ (x,y) \in \mathbb{R}^2$

3) $2 \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \ ; \ (x,y) \in \mathbb{R}^2$

via le changement de variable $\begin{cases} r = x + y \\ s = x + 2y \end{cases}$

4) $x \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - y \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \ ; \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

via les coordonnées polaires.

**Solution :**

1) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x y^2$

$f(x,y) = \frac{x^2}{2} y^2 + C(y)$, où $C \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2) $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = y\, f(x,y)$

**Rappel** La solution générale de l'équa diff $(y' = a(x)y)$ est $y(x) = C\, e^{A(x)}$, où $A(x) = \int a(x)\,dx$, une primitive de la fonction a.

Solution : $f(x,y) = C(x)\, e^{\frac{y^2}{2}}$, où $C \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

3) $2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$

$$\begin{cases} r = x + y \\ s = x + 2y \end{cases}$$

Posons $f(x,y) = g(r,s)$

D'après la règle de la chaîne, on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\partial g}{\partial s} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial r} + 2\frac{\partial g}{\partial s} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} r = x + y \\ s = x + 2y \end{array}}$$

Ainsi :

$2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \iff \frac{\partial g}{\partial r}(r,s) = 0$ (EDP facile)

$\iff g(r,s) = C(s)$ ; où $C \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$

$\iff \boxed{f(x,y) = C(x+2y)}$ où $C \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$

Pause : (Vérification) $\frac{\partial f}{\partial y} = 2\,C'(x+2y)$ et $\frac{\partial f}{\partial x} = C'(x+2y)$...

4) $x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0\ ;\ (x,y)\in \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$$

Posons $f(x,y) = g(r,\theta)$

D'après la règle de la chaîne, on a :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial r} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial r} \\ \dfrac{\partial g}{\partial \theta} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial \theta} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial r} = \cos\theta\,\dfrac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\,\dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial \theta} = -r\sin\theta\,\dfrac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\,\dfrac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial g}{\partial \theta} = -y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y}}$$

D'où :

$$\boxed{x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \iff \frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = 0}$$

$$\iff g(r,\theta) = C(r),\ \text{où } C\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

$$\iff \boxed{f(x,y) = C\left(\sqrt{x^2+y^2}\right),\ \text{où } C\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})}$$

C'est la solution générale de l'EDP voulue.

fin solution

# IV) Fonctions de classe $C^k$

## 1) Fonctions de classe $C^2$

$f : \Omega \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$

$(e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

$\longrightarrow$ Supposons que les dérivées partielles premières $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ existent sur $\Omega$.

$\longrightarrow$ Soit $i \in [\![1, n]\!]$ fixé.

Supposons que les dérivées partielles premières de $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existent sur $\Omega$.

(*) $\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \text{ se note } \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \\ \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \text{ se note } \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \end{cases}$

(**) Les $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ s'appellent les dérivées partielles secondes de $f$.

---

**Par exemple** Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, alors les dérivées partielles secondes de $f$ sont $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

---

**Déf 1** $f : \Omega \subset E \to \mathbb{R}$ et B une base de E.

$f$ est dite de classe $C^2$ sur $\Omega$ si et ssi toutes les dérivées partielles secondes de $f$ existent et sont continues sur $\Omega$.

## Prop 2 (Théorème de Schwarz)

Si $f : \Omega \subset E \to \mathbb{R}$ est de classe $C^2$ sur $\Omega$ alors :

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

## Exemple illustratif

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,;\ (x, y) \mapsto x^2 y^3$.

$f$ est bien de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^2$, car polynomiale.

Et on a effectivement :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 6xy^2$$

## 2) Fonction de classe $C^k$

- On définit de même les dérivées $k$èmes, pour tout $k \geq 3$.
- Une fonction est dite de classe $C^k$ si toutes ses dérivées partielles $k$ èmes existent et sont continues.
- Les propriétés sur les fonctions de classe $C^k$ sont les mêmes que celles des fonctions de classe $C^1$ déjà citées.
- Les fonctions polynomiales sont en conséquence de classe $C^k$.

## 3) Développement limité d'ordre 2

**Prop :** $f : \Omega \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^2$. $a \in \Omega$.

Le $DL_2(a)$ est :

$$f(a+h) \underset{0}{=} f(a) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right)^{(2)} + o(\|h\|^2)$$

où $\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i\right)^{(2)} = \sum_{1\leq i,j\leq n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$

Càd $f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \frac{1}{2}\left(\sum_{1\leq i,j\leq n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right) + o(\|h\|^2)$

**Cas de dim 2 :**

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^2$. $a \in \mathbb{R}^2$. $h = (h_1, h_2)$

$$f(a+h) \underset{0}{=} f(a) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a).h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a).h_2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a).h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a).h_2^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a).h_1.h_2\right) + o(\|h\|^2)$$

Car $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ (Schwarz)

## 4) Les EDP de second ordre :

**Prop :** $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^2$.

1) $\left(\forall (x,y) \in \Omega, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0\right) \Longleftrightarrow f(x,y) = C(y).x + D(y)$

où $C$ et $D \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$

2) De même $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0 \Longleftrightarrow f(x,y) = C(x).y + D(x)$

3) $\left(\forall (x,y) \in \Omega, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0\right) \Longleftrightarrow f(x,y) = C(x) + D(y)$

où $C$ et $D \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$

NB :

Il faut savoir retrouver ces équivalences ; comme ci-après :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \iff \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 0$$
$$\iff \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = C(y)$$
$$\iff f(x,y) = C(y)\cdot x + D(y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0 \iff \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 0$$
$$\iff \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = C(x)$$
$$\iff f(x,y) = D(x) + A(y)$$

Exemple

Résoudre l'EDP suivante :

$(E_1)$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$ , $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ où $c > 0$ fixé

« C'est l'équa de propagation des ondes)

On donne le changement de var $\begin{cases} s = x + cy \\ t = x - cy \end{cases}$

Sol  On pose $f(x,y) = g(s,t)$

Comme tjrs, on trouvera une EDP équivalente à $(E_1)$ d'inconnue la nouvelle fonction $g$ et qui est facile à résoudre.
On trouve alors $g$ puis $f$.

a/ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \ ?$

$f(x,y) = g(s,t)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}(g(s,t))\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial s}\cdot\underbrace{\frac{\partial s}{\partial x}}_{=1} + \frac{\partial g}{\partial t}\cdot\underbrace{\frac{\partial t}{\partial x}}_{=1}\right)$$

règle de la Chaîne

$\begin{cases} s = x + cy \\ t = x - cy \end{cases}$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial s}(s,t) + \frac{\partial g}{\partial t}(s,t)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial s}(s,t)\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial t}(s,t)\right)$$

règle de la Chaîne

$$= \left(\frac{\partial^2 g}{\partial s^2}\overbrace{\frac{\partial s}{\partial x}}^{1} + \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial s}\cdot\overbrace{\frac{\partial t}{\partial x}}^{1}\right) + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial s \partial t}\cdot\overbrace{\frac{\partial s}{\partial x}}^{1} + \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}\cdot\overbrace{\frac{\partial t}{\partial x}}^{1}\right)$$

D'où $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2 g}{\partial s \partial t}$$

$\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0}_{(E_1)}$

b/ On trouve de m (à détailler chez vous)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 g}{\partial s^2} - 2\frac{\partial^2 g}{\partial s \partial t} + \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}\right)$$

$\begin{cases} s = x + cy \\ t = x - cy \end{cases}$

D'où $(E_1) \Leftrightarrow \dfrac{\partial^2 g}{\partial s \partial t} = 0$ qui est facile

$g(s,t) = F(s) + D(t)$ où $F$ et $D \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

C/c La solution générale de l'EDP $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

est $f(x,y) = F(x+cy) + D(x-cy)$ où $F$ et $D \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

---

**Ex2** Résoudre sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ l'EDP :

$(E_2)$ : $x^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = xy$

Via les cordonnées polaires $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

---

**NB** : $\left((x,y) \in ]0,+\infty[\times\mathbb{R}\right) \Leftrightarrow \left(r > 0 \text{ et } \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$

---

# V Matrices hessiennes et extremums locaux

$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $C^2$, $a \in \Omega$

**Déf 1** : La matrice hessienne de $f$ au point $a$ est :

$$H(f)(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R}).$$

**NB** : Les matrices hessiennes sont réelles symétriques

donc diagonalisables.

**Prop 2 : (admise)**

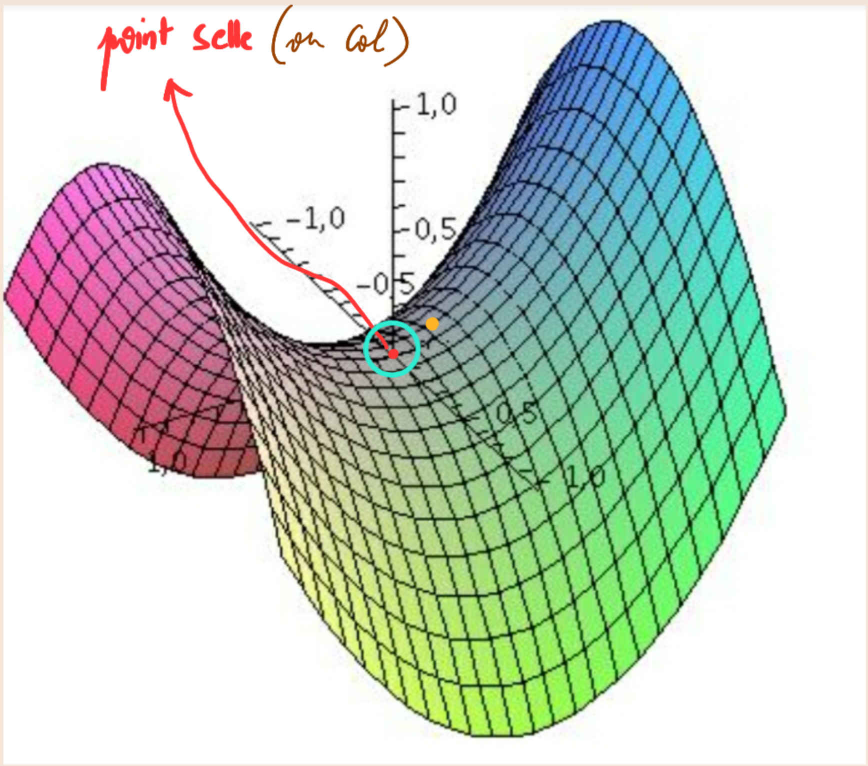
Supp que $a$ point critique de $f$ et que $H(f)(a)$ est inversible (i.e 0 n'est pas val propre)

1/ Si toutes les valeurs propres de $H(f)(a)$ sont strictement positives (respec négatives) alors $f$ possède en $a$ un minimum (resp un maximum) Local.

2/ S'il existe au moins deux valeurs propres de $H(f)(a)$ l'une strictement positive et l'autre strict négative Alors $a$ est un point col (ou selle)

**NB :** Un point critique qui ne représente pas un extremum Local de $f$ est dit point Col (ou point selle) de $f$.

**Rque :** 1/ « selle » relativement à une selle de cheval
2/ « Col » relativement au col de montagne



$f(x,y) = x^4 + y^4 - \frac{1}{4}(x-y)^2$ $(0,0)$

## Corollaire 3 (Cas particulier ($n=2$))

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $C^2$ et $a \in \mathbb{R}^2$ point critique.

Notations de Monge :

$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$ ; $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$ ; $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$

$\Delta = rt - s^2$

1/ Si $\Delta > 0$ (extremum Local) ; $\begin{cases} \text{Si } r > 0 \text{ alors min Local} \\ \text{Si } r < 0 \text{ alors max Local} \end{cases}$

2/ Si $\Delta < 0$ (point col)

3/ Si $\Delta = 0$ On ne peut conclure.

Démo :

$H(f)(a) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ car diagonlisable.

2) $\Delta < 0 \Rightarrow \lambda\mu < 0$
$\Rightarrow \lambda$ et $\mu$ de signes differents
(Prop 2) $\Rightarrow a$ est un point col

1) $\Delta > 0 \Rightarrow \lambda\mu > 0$
$\Rightarrow \lambda$ et $\mu$ de même signe, et donc extremum local.

$\Delta > 0 \Rightarrow rt - s^2 > 0$
$\Rightarrow rt > s^2$

$\Rightarrow$ r et t de m̂ signe

i) $r > 0 \Rightarrow t > 0$

$\Rightarrow r + t > 0$

$\Rightarrow \lambda + \mu > 0$ (c'est la trace)

$\Rightarrow \lambda$ et $\mu$ strict positifs.

(Prop 2) $\Rightarrow$ a min local

ii) $r < 0$ idem

Ex d'application :

$$f : \begin{array}{|l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto f(x,y) = x^4 + y^4 - \frac{1}{4}(x-y)^2 \end{array}$$

Cherchons les extremums locaux de f.

Sol :

1/ points critiques (Détaillez chez vous)

$(0,0)$ ; $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ; $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

2°/ 1) Pour $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$f(x,y) = x^4 + y^4 - \frac{1}{4}(x-y)^2$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{1}{2}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 - \frac{1}{2}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12y^2 - \frac{1}{2}$.

$$\begin{cases} r = \frac{5}{2} \\ s = \frac{1}{2} \\ t = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$\Delta = rt - s^2 = 6 > 0 \Rightarrow$ extremum local.

Et on a $r > 0 \Rightarrow$ c'est un minimun Local

**2-2)** Pour $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ Idem c'est un minimal Local

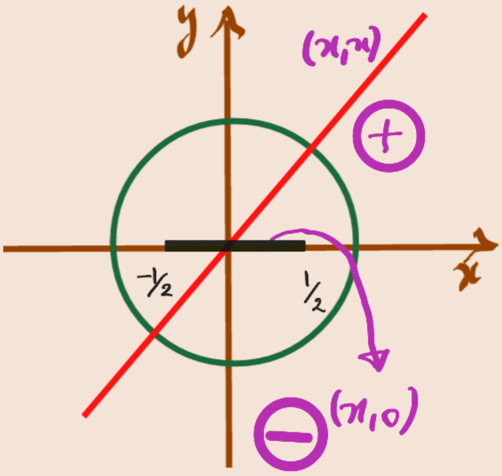
**2-3)** Pour $(0,0)$

$$\begin{cases} r = -\frac{1}{2} \\ s = \frac{1}{2} \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \Delta = rt - s^2 = 0$$

On ne peut pas conclure.

on passe à l'étude du signe de $\left(f(x,y) - f(0,0)\right)$

On a $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) - f(0,0) = x^4 + y^4 - \frac{1}{4}(x-y)^2$




$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, \ f(x,x) - f(0,0) = 2x^4 > 0}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x,0) - f(0,0) = x^4 - \frac{1}{4}x^2 = x^2\left(x^2 - \frac{1}{4}\right)$

$\Rightarrow \forall x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[ \setminus \{0\}$, $f(x,0) - f(0,0) < 0$

D'où $(0,0)$ n'est pas un extrmum Local.

(point col)

## VI Vecteurs tangents à une partie.

**Déf 1 :**

$a \in A$, $A \subset E$

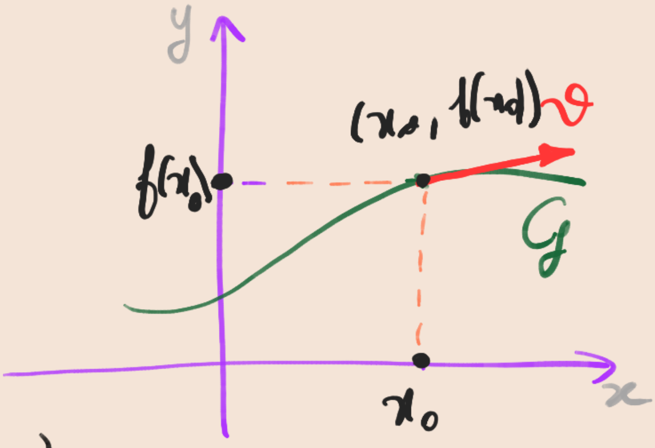
$v$ est dit un vecteur tangent à $A$ ssi il existe $\varepsilon > 0$ et $\gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \longrightarrow A$ dérivable en $0$ telle que

$$\begin{cases} \gamma(0) = a \\ \gamma'(0) = v \end{cases}$$

**Exemple illustratif :**

Ici $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. $A = (\mathcal{C}_f) \subset E = \mathbb{R}^2$

$a = (x_0, f(x_0)) \in A$




D'après lycée on a :

$v = (1, f'(x_0))$ vecteur tangent à $A = \mathcal{C}_f$ en $(x_0, f(x_0)) = a$.

Car $(T) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

i.e $(T)$ $f'(x_0)x - y + c = 0$ ; $(1, f'(x_0))$ vect tangent

Justification avec la déf 1

Considérons l'applic suivante :

$$\gamma : ]-1, 1[ \longrightarrow C_f$$
$$t \longmapsto \gamma(t) = (t + x_0, f(t+x_0)) \in C_f$$

i) $\gamma$ dérivable en $0$ (claire)

ii) $\gamma(0) = (x_0, f(x_0)) = a$

$\gamma'(t) = (1, f'(t+x_0))$

$\Longrightarrow$ iii) $\gamma'(0) = (1, f'(x_0)) = v$

De i) ii) iii) on conclut.

---

Déf 2 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

La surface représentative de la fonction $f$ est L'ensemble des $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tque $z = f(x, y)$

## Déf 3 : (Plan tangent à une surface)

$(S)$ : $z = f(x,y)$ une surface et $(x_0, y_0, z_0) \in S$.

Supposons que $f$ est différentiable en $(x_0, y_0)$.

**Le plan tangent** à $S$ en $(x_0, y_0, z_0)$ est :

$$(P) : z = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + f(x_0,y_0)$$

càd $(P)$ : $z = df(x_0,y_0) \cdot \big((x,y) - (x_0,y_0)\big) + f(x_0,y_0)$

## Ex d'application :

Soit $(S)$ : $z = x^2 + 2y^2$, soit $(x_0, y_0, z_0) \in S$

Determiner une équation cartésienne du plan tangent à la surface $(S)$ au point $(x_0, y_0, z_0)$

**Sol :** On trouve $(P)$ : $z = 2x_0 x + 4y_0 y - z_0$

**en effet** on a $(S)$ : $z = f(x,y)$ où

$f(x,y) = x^2 + 2y^2$ qui est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

$$\Rightarrow (P) : z = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + f(x_0,y_0)$$

$$(P) : z = 2x_0(x-x_0) + 4y_0(y-y_0) + \underbrace{f(x_0,y_0)}_{= z_0 \text{ ; car } (x_0,y_0,z_0) \in (S)}$$

D'autre part on a

$(x_0, y_0, z_0) \in S \iff z_0 = x_0^2 + 2y_0^2$

D'où $(P)$ $z = 2x_0 x + 4y_0 y - 2\underbrace{(x_0^2 + 2y_0^2)}_{= z_0} + z_0$

D'où $(P)$ : $z = 2x_0 x + 4y_0 y - z_0$ $\square$

---

**Déf 4 : (Ligne de niveau)**

1/ $f : U \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$

$\{x \in U \,/\, f(x) = c\}$ s'appelle **ligne de niveau** de $f$ d'équation « $f(x) = c$ »

2/ **En dim 3**

On parle de **surface de niveau c**

3/ **En dim 2**

On parle de **courbe de niveau c**

---

**Prop 5 :** $f : \Omega \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ diff sur $\Omega$,

E espace euclidien.

$A$ une ligne de niveau de $f$ et $a \in A$

Les vecteurs tangents à $A$ en $a$ sont orthogonaux au gradient $\nabla f(a)$.

---

Démo :

Notons $A = \{x \in \Omega \,/\, f(x) = c\}$ où $c \in \mathbb{R}$

$a \in A$, soit $v$ un vecteur tangent à $A$ en $a$.

Mque $\langle \nabla f(a) \,/\, v \rangle = 0$

Soit $\gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \longrightarrow A$ dérivable en $0$

tque $\begin{cases} \gamma(0) = a \\ \gamma'(0) = v \end{cases}$

$$f \circ \gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto f \circ \gamma(t) = f(\gamma(t))$$

est bien dérivable en $0$

En plus $\left(\forall t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[ \;\; f(\gamma(t)) = c\right)$ car $\gamma \in A$

$\Longrightarrow (f \circ \gamma)'(0) = 0$

$\Longrightarrow df(\underbrace{\gamma(0)}_{a}) \cdot \underbrace{\gamma'(0)}_{v} = df(a)(v) = \langle \nabla f(a) \,/\, v \rangle = 0$

Fin