Ensembles et Applications

Résumé Lacunaire

I) Ensembles

1) Inclusion – Appartenance

Déf (Inclusion)

On dit qu'un ensemble A est inclus dans un ensemble B si et seulement si tous les éléments de [redacted] appartiennent à [redacted].

On note A [redacted] B.

Résumé

$A \subset B \iff ($ [redacted] $x \in$ [redacted] $, x \in$ [redacted] $)$

NB

1) A [redacted] B veut dire « A n'est pas inclus dans B ».

2) $A \not\subset B \iff ($ [redacted] $x \in A$ tel que x [redacted] $B)$

Vocabulaire

1) Un ensemble composé d'un seul élément a s'appelle un [redacted].

2) Un ensemble composé de deux éléments s'appelle

Une [redacted]

Prop

1) $x \in \{a\} \Leftrightarrow x$ [redacted]

2) $\{a\} = \{b\} \Leftrightarrow a$ [redacted]

3) $\{a\} \subset A \Leftrightarrow a$ [redacted]

4) Supposons que $a \neq b$. On a :

$x \in \{a,b\} \Leftrightarrow (x =$ [redacted] [redacted] $x =$ [redacted]$)$

Prop

1) ϕ [redacted] A

2) A [redacted] A

3) $(A \subset B$ et $B \subset A) \Leftrightarrow A$ [redacted] B

4) $(A \subset B$ et $B \subset D) \Rightarrow A$ [redacted]

2) Ensemble des parties d'un ensemble

Notation et vocabulaire

1) Si A [redacted] B, on dit que aussi que A est une partie de B.

On dit encore que [redacted] contient [redacted].

2) Si $A \subset B$, on écrit aussi B [redacted] A.

Notation et vocabulaire

Soit E un ensemble.

1) L'ensemble formé par toutes les parties de E se note $\mathcal{P}(E)$.

2) $\mathcal{P}(E)$ c'est l'ensemble des parties de E.

3) Intersection et réunion d'ensemble

Déf (Intersection)

1) L'intersection des ensembles A et B est l'ensemble formé par les éléments qui appartiennent à [redacted]

2) On la note A [redacted] B, et se lit « A inter B ».

$x \in A \cap B \iff (x \in$ [redacted] [redacted] $x \in$ [redacted]$)$

par définition

Résumé

Vocabulaire

Si A [redacted] $B =$, on dit que A et B sont disjoints.

Prop

1) $A \cap B$ [redacted] $B \cap A$

2) $A \cap A =$ [redacted]

3) $A \cap \emptyset =$ [redacted]

4) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B =$ [redacted]

5) $\begin{pmatrix} A \subset B \\ A \subset D \end{pmatrix} \Leftrightarrow A \subset ($ [redacted] $)$

6) $(A \cap B)$ [redacted] A et $(A \cap B)$ [redacted] B

Déf (Réunion)

1) La réunion des ensembles A et B est l'ensemble formé par les éléments qui appartiennent à [redacted]

2) On la note $A \cup B$, et se lit « A Union B ».

$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in$ [redacted] [redacted] $x \in$ [redacted] $)$

par définition

Résumé

Prop

1) $A \cup B$ [redacted] $B \cup A$

2) $A \cup A =$ [redacted]

3) $A \cup \emptyset =$ [redacted]

4) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B =$ [redacted]

5) $\begin{pmatrix} B\subset A \\ D\subset A \end{pmatrix} \iff (B$ [redacted] $D)\subset A$

6) $(A\cup B)$ [redacted] A et $(A\cup B)$ [redacted] B

7) $A\cap(B\cup C) = (A$ [redacted] $B)$ [redacted] $(A$ [redacted] $C)$

8) $A\cup(B\cap C) = (A$ [redacted] $B)$ [redacted] $(A$ [redacted] $C)$

9) $A\cap(B\cap C)$ [redacted] $(A\cap B)\cap C$.

On écrit $A\cap B\cap C$; sans parenthèses.

10) $A\cup(B\cup C)$ [redacted] $(A\cup B)\cup C$.

On écrit $A\cup B\cup C$; sans parenthèses.

---

4) Complémentaire d'une partie dans un ensemble

Déf

Soit $A\subset E$.

1) Le Complémentaire de A dans E est la partie de E formée par les éléments qui [redacted] à A.

2) On la note C_E^A ou $\bar{A}$.

Résumé

1) $\bar{A} = \{x\in E / x$ [redacted] $A\}$

2) Soit $x\in E$.

$x\in\bar{A} \iff x$ [redacted] A

Prop

Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$. On a :

1) $\overline{E} =$ [redacted]

2) $\overline{\phi} =$ [redacted]

3) $\overline{\overline{A}} =$ [redacted] ($\overline{(\overline{A})}$ se note $\overline{\overline{A}}$)

4) $\overline{A \cap B} = \overline{A}$ [redacted] $\overline{B}$

5) $\overline{A \cup B} = \overline{A}$ [redacted] $\overline{B}$

6) $A \subset B \iff \overline{A}$ [redacted] $\overline{B}$

Prop

Soit $A \subset E$. On a :

1) $A \cap \overline{A} =$ [redacted]

2) $A \cup \overline{A} =$ [redacted]

Déf (Différence $A \setminus B$)

Soient A et B deux parties de E.

La différence $A \setminus B$ est la partie de E formée par les éléments qui appartiennent à [redacted] et qui n'appartiennent pas à [redacted].

Résumé

$x \in A \setminus B \iff (x \in$ [redacted] [redacted] $x \notin$ [redacted]$)$

Prop

Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$. On a :

$A \setminus B = A \cap$ [redacted]

5) Produit Cartésien d'ensembles

Déf

Soient E et F deux ensembles non vides.

1) $E \times F = \{ (x,y) \ / \ x \in$ [redacted] et $y \in$ [redacted] $\}$

2) C'est le produit Cartésien de E et F.

Résumé

$(x,y) \in E \times F \Leftrightarrow (x \in$ [redacted] et $y \in$ [redacted]$)$

Déf

$E_1 \times \dots \times E_n = \{ (x_1, \dots, x_n) \ / \ x_1 \in$ [redacted] $, \dots, x_n \in$ [redacted] $\}$

Résumé

$(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n \Leftrightarrow ($ [redacted] $1 \leq i \leq n, \ x_i \in$ [redacted] $)$

Notations

1) $E\times E$ se note E [redacted] .

2) $\underbrace{E\times\dots\times E}_{n \text{ fois}}$ se note E [redacted] .

Ainsi :

1) $(x,y)\in E^2 \iff (x\in$ [redacted] et $y\in$ [redacted] $)$

2) $(x_1,\dots,x_n)\in E^n \iff ($ [redacted] $1\leq i\leq n,\ x_i\in$ [redacted] $)$

NB

1) $(x,y)=(a,b) \iff (x=$ [redacted] [redacted] $y=$ [redacted] $)$

2) $(x_1,\dots,x_n)=(y_1,\dots,y_n) \iff ($ [redacted] $1\leq i\leq n,\ x_i=$ [redacted] $)$

b) Intersection et réunion quelconques

Déf

Soient $A_1,\dots,A_n$ des parties de E.

1) $x\in A_1\cap\dots\cap A_n \iff (x\in$ [redacted] [redacted] $\dots$ [redacted] $x\in$ [redacted] $)$

2) $x\in A_1\cup\dots\cup A_n \iff (x\in$ [redacted] [redacted] $\dots$ [redacted] $x\in$ [redacted] $)$

Notations

1) $A_1\cap\dots\cap A_n$ se note [redacted] $\bigcap_{i=} A$ [redacted]

2) $A_1\cup\dots\cup A_n$ se note [redacted] $\bigcup_{i=} A$ [redacted]

Ainsi :

1) $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i \iff ($ [redacted] $1 \leq i \leq n, \ x \in$ [redacted] $)$

2) $x \in \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i \iff ($ [redacted] $1 \leq i \leq n, \ x \in$ [redacted] $)$

Généralement :

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de parties de E.

« càd que : $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset E$ »

1) a) On note $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$ ou encore $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

b) $x \in \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \iff ($ [redacted] $n \in \mathbb{N}, \ x \in$ [redacted] $)$

2) a) On note $\bigsqcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ ou encore $\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

b) $x \in \bigsqcup_{n=0}^{+\infty} A_n \iff ($ [redacted] $n \in \mathbb{N}, \ x \in$ [redacted] $)$

Plus généralement

Soit I un ensemble non vide.

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E.

« càd que : $\forall i \in I, A_i \subset E$ »

1) $x \in \bigcap_{i \in I} A_i \iff ($ [redacted] $i \in I, \ x \in$ [redacted] $)$

2) $x \in \bigsqcup_{i \in I} A_i \iff ($ [redacted] $i \in I, \ x \in$ [redacted] $)$

Prop

1) a) $A\cap(B_1\cup\cdots\cup B_n)=(A$ [redacted] $B_1)$ [redacted] $\cdots$ [redacted] $(A$ [redacted] $B_n)$

b) Càd :

$A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}B_i\right)=$ [redacted] $_{i=1}^{n}(A$ [redacted] $B_i)$

c) En général :

$A\cap\left(\bigcup_{i\in I}B_i\right)=$ [redacted] $_{i\in I}(A$ [redacted] $B_i)$

2) a) $A\cup(B_1\cap\cdots\cap B_n)=(A$ [redacted] $B_1)$ [redacted] $\cdots$ [redacted] $(A$ [redacted] $B_n)$

b) Càd :

$A\cup\left(\bigcap_{i=1}^{n}B_i\right)=$ [redacted] $_{i=1}^{n}(A$ [redacted] $B_i)$

c) En général :

$A\cup\left(\bigcap_{i\in I}B_i\right)=$ [redacted] $_{i\in I}(A$ [redacted] $B_i)$

3) a) $\overline{A_1\cap\cdots\cap A_n}=\overline{A_1}$ [redacted] $\cdots$ [redacted] $\overline{A_n}$

b) Càd : $\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=$ [redacted] $_{i=1}^{n}\overline{A_i}$

c) En général :

$\overline{\bigcap_{i\in I}A_i}=$ [redacted] $_{i\in I}\overline{A_i}$

4) a) $\overline{A_1 \sqcup \dots \sqcup A_n} = \overline{A_1}$ [redacted] $\dots$ [redacted] $\overline{A_n}$

b) Càd :

$\overline{\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i} =$ [redacted] $_{i=1}^{n} \overline{A_i}$

c) En général :

$\overline{\bigsqcup_{i\in I} A_i} =$ [redacted] $_{i\in I} \overline{A_i}$

5) $\forall j \in I, \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$ [redacted] A_j

6) $\forall j \in I, A_j$ [redacted] $\left(\bigsqcup_{i\in I} A_i\right)$

7) $(\forall i \in I, A \subset B_i) \iff A \subset ($ [redacted] $_{i\in I} B_i)$

8) $(\forall i \in I, A \supset B_i) \iff A \supset ($ [redacted] $_{i\in I} B_i)$

7) Partition d'un ensemble

Déf

Soient $A_1, \dots, A_n$ des parties de E.

On dit que $A_1, \dots, A_n$ forment une partition de E si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1) $A_1, \dots, A_n$ sont deux à deux [redacted]

2) $E = A_1$ [redacted] $\dots$ [redacted] A_n

Autrement dit

1) $\forall i$ [redacted] j, $A_i \cap A_j =$ [redacted]

2) $E =$ [redacted] $_{i=1}^{n} A_i$

Prop

Soit A une partie de E.

A et [redacted] forment une partition de E.

Déf (Cas général)

On dit que la famille $(A_i)_{i\in I}$ forme une partition de E si et ssi les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1) $\forall i$ [redacted] j, $A_i \cap A_j =$ [redacted]

2) $E =$ [redacted] A_i
$i \in I$

---

2) Égalité de deux applications

Déf

Soient $f : E \to F$ et $g : E' \to F'$ deux applications.

1) On dit que f et g sont égales si et seulement si

a) $E =$ [redacted] et $F =$ [redacted]

b) $\forall x \in E$, $f(x) =$ [redacted]

2) On écrit $f = g$.

NB :

$\mathcal{F}(E,F)$ ou [redacted] [redacted] désigne l'ensemble des applications de E vers F.

---

3) Applications particulières

a) L'identité de E

Déf

On la note I_E ou id_E.

Elle est définie par :

$I_E :$ [redacted] $\longrightarrow$ [redacted]

$x \longmapsto$ [redacted]

$\forall x \in$ [redacted] $, \ I_E(x) =$ [redacted]

b) L'indicatrice d'une partie

Déf

Soit $A \subset E$.

La fonction indicatrice de A se note 1_A et est définie par :

$1_A : E \longrightarrow \mathbb{R}$

$\forall x \in E, \ 1_A(x) = \begin{cases} \text{[redacted]} & \text{si } x \in A \\ \text{[redacted]} & \text{si } x \notin A \end{cases}$

4) Composée de deux applications

Déf

Soient $f \in \mathcal{F}(E,F)$ et $g \in \mathcal{F}($[redacted]$, G)$.

La composée $g \circ f$ est l'application définie par :

$$\boxed{\begin{aligned} g\circ f : E &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto (g\circ f)(x) = \text{[redacted]} \end{aligned}}$$

Prop

Soit $f \in \mathcal{F}(E,F)$. On a :

1) $f \circ I_E =$ [redacted]

2) $I_F \circ f =$ [redacted]

Corollaire

Soit $f \in E^E$. On a :

$f \circ$ [redacted] $= f$

[redacted] $\circ f = f$

Attention

L'égalité « $f \circ g = g \circ f$ » est en général [redacted]

NB

Soient $f, g \in \mathcal{F}(E,F)$.

$f \neq g \iff ($ [redacted] $x \in E,\ f(x)$ [redacted] $g(x))$

Alors pour vérifier que $f \neq g$, il suffit d'exhiber un $x_0 \in E$ tel que $f(x_0)$ [redacted] $g(x_0)$.

5) Image directe – Image réciproque

(Image directe $f(A)$)

Déf

Soit $f \in \mathcal{F}(E,F)$. Soit $A \subset E$.

L'image directe de A par f est la partie de F définie par :

$$f(A) = \{ f(x) / x \in$$ [redacted]

Résumé

$$y \in f(A) \iff ($$ [redacted] $x \in A,$ [redacted] $= f($ [redacted] $))$

Prop

Soit $f \in \mathcal{F}(E,F)$. On a :

1) $A \subset B \Longrightarrow f(A)$ [redacted] $f(B)$

2) i) $f(A \cup B)$ [redacted] $f(A) \cup f(B)$

ii) $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$ [redacted] $\bigcup_{i\in I} f(A_i)$

3) i) $f(A \cap B)$ [redacted] $(f(A) \cap f(B))$

ii) $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$ [redacted] $\bigcap_{i\in I} f(A_i)$

(Image réciproque)

Déf

Soit $f \in \mathcal{F}(E,F)$. Soit $B \subset F$.

L'image réciproque de B par f est :

$f^{-1}(B) = \{x \in E /$ [redacted] $\}$

Résumé

$x \in f^{-1}(B) \Longleftrightarrow$ [redacted]

par définition

Prop

Soit $f \in \mathcal{F}(E,F)$. On a :

1) $A \subset B \Longrightarrow f^{-1}(A)$ [redacted] $f^{-1}(B)$

2) a) $f^{-1}(A \cup B)$ [redacted] $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

b) $f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$ [redacted] $\bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i)$

3) a) $f^{-1}(A \cap B)$ [redacted] $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

b) $f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)$ [redacted] $\bigcap_{i \in I} f^{-1}(A_i)$

4) $f^{-1}(\overline{A}) =$ [redacted]

6) Applications injectives - Applications surjectives

a) Applications injectives

Déf

Soit $f \in \mathcal{F}(E,F)$.

f est dite injective si et seulement si :

$\forall x, x' \in E$, [redacted] = [redacted] $\Longrightarrow x = x'$

NB

Pour montrer qu'une application f n'est pas injective, il suffit qu'on présente deux éléments a et b de notre choix vérifiant [redacted] = [redacted] et [redacted] $\neq$ [redacted].

Prop

Soit $f \in \mathcal{F}(E,F)$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) f est injective

2) ($\forall x, x' \in E$, x [redacted] x' $\Longrightarrow f(x)$ [redacted] $f(x')$)

Prop

La composée de deux applications injectives est une application [redacted]

a) Applications surjectives

Déf

Soit $f \in \mathcal{F}(E,F)$.

f est dite surjective si et seulement si :

[redacted] $y \in F$, [redacted] $x \in E$, [redacted] $= f($[redacted]$)$

Autrement dit

Tout élément de l'ensemble d'arrivée possède au moins un [redacted] par f.

NB :

Soit $f \in \mathcal{F}(E,F)$.

Pour montrer que f n'est pas surjective, il suffit de présenter un élément de l'arrivée qui n'a pas d'antécédant.

Prop

Soit $f \in \mathcal{F}(E,F)$.

1) $f^{-1}(F)$ [redacted] E

2) $f(E)$ [redacted] F

3) $f(\underset{\text{départ}}{E}) = \underset{\text{arrivée}}{F} \iff f$ [redacted]

Prop

La Composée de deux applications surjectives est une application [redacted]

7) Applications bijectives

Déf

Une application est dite bijective quand elle est à la fois [redacted] et [redacted].

Prop

La Composée de deux applications bijectives est une application [redacted].

Prop

Soit $f \in \mathcal{F}(E,F)$.

$$f \text{ est bijective } \iff (\forall y \in F, \text{[redacted]} x \in E, y = f(x))$$

8) Réciproque d'une bijection

Déf

Soit $f : E \to F$ une bijection.

La réciproque de f est l'application notée f^{-1} définie de F vers E qui associe à chaque $y \in F$ l'unique $x \in E$ vérifiant [redacted] = [redacted].

Résumé

Soit $f : E \longrightarrow F$ une bijection.

1) $f^{-1} : F \longrightarrow E$

2) $\forall y \in F, \forall x \in E$, on a :

$f^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow$ [redacted] $= f($[redacted]$)$

Prop

Soit $f : E \longrightarrow F$ une bijection.

1) a) $\forall x \in F, f(f^{-1}(x)) =$ [redacted]

b) $\forall x \in E, f^{-1}(f(x)) =$ [redacted]

2) a) $f \circ f^{-1} =$ [redacted]

b) $f^{-1} \circ f =$ [redacted]

Corollaire

Soit $f : E \longrightarrow E$ une bijection. On a :

$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f =$ [redacted]

Déf

Une bijection d'un ensemble E vers lui-même s'appelle

pu[redacted] de E.

Notation

[redacted](E) : désignera l'ensemble des permutations de E.

Prop

Soit $f \in \mathcal{F}(E,F)$.

1) Les propositions suivantes sont équivalentes :

a) f est bijective.

b) $\exists\, g \in \mathcal{F}(F,E)$ telle que : $\begin{cases} f\circ g = \text{[redacted]} \\ g\circ f = \text{[redacted]} \end{cases}$

2) Dans ce cas, on a : $\boxed{f^{-1} =}$ [redacted]

Notations

Soit $f \in E^E = \mathcal{F}(E,E)$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$\underbrace{f\circ f\circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$ se note f[redacted].

2) $f^0 =$ [redacted]

Prop

Soit $f : E \to F$ une bijection. On a :

1) f^{-1} est aussi bijective.

2) Sa réciproque est : $(f^{-1})^{-1} =$ [redacted]

Prop

1) La composée de deux bijections est une bijection.

2) On a en plus : $(f \circ g)^{-1} =$ [redacted]$^{-1} \circ$ [redacted]$^{-1}$

9) Prolongement – Restriction

a) Prolongement

Déf

Soit $f : E \to F$ une application.

Soit E' un ensemble contenant E. $(E \subset E')$

On appelle prolongement de f à E', toute application $g :$ [redacted] $\to F$ vérifiant :

$\forall x \in$ [redacted], $g(x) =$ [redacted]

b) Restriction

Déf

Soit $f : E \to F$ une application.

Soit $A \subset E$.

La restriction de f à A est l'application notée $f/_A$ et définie par : $f/_A :$ [redacted] $\to F$

$x \longmapsto (f/_A)(x) =$ [redacted]

III) Relation binaire

1) Généralités

Déf

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E.

1) $\mathcal{R}$ est dite réflexive si et seulement si :

$\forall$ [redacted]

2) $\mathcal{R}$ est dite symétrique si et seulement si :

$\forall$ [redacted]

3) $\mathcal{R}$ est dite anti-symétrique si et seulement si :

$\forall$ [redacted]

4) $\mathcal{R}$ est dite transitive si et seulement si :

$\forall$ [redacted]

2) Relation d'équivalence

Déf

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble non vide E.
$\mathcal{R}$ est dite relation d'équivalence sur E si et ssi elle est à la fois [redacted], [redacted] et [redacted]

Relation de Congruence dans $\mathbb{Z}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Pour $a, b \in \mathbb{Z}$, on définit la relation de congruence modulo par :

$$a \equiv b[n] \Leftrightarrow$$ [redacted]

2) $a \equiv b[n]$ se lit « a est [redacted] à b [redacted] n »

Prop

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

La congruence modulo n est une relation d'[redacted] sur $\mathbb{Z}$.

Déf (Classe d'équivalence)

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E.

Soit $a \in E$.

1) La classe d'équivalence de a est la partie $\bar{a}$ de E définie par :

$$\bar{a} = \{x \in E /$$ [redacted] $\}$

2) $\bar{a}$ se note aussi Cl(a).

$\forall a \in E, \ \bar{a}$ [redacted] E

$x \in \bar{a} \Leftrightarrow$ [redacted]

par déf

Résumé

Prop

Soit R une relation d'équivalence sur E.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) xRa
2) [redacted] R [redacted]
3) [redacted] $\in$ [redacted]
4) [redacted] $\in$ [redacted]
5) $\overline{x}$ [redacted] $\overline{a}$

Prop

Soient $x, a \in E$.

1) $\overline{x} \neq \overline{a} \iff \overline{x} \cap \overline{a} =$ [redacted]
2) Deux classes d'équivalences, sont soient égales soient [redacted]

Prop

Soit R une relation d'équivalence sur E.

1) Les classes d'équivalence forment une [redacted]
2) Autrement dit :

Si $\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}$ sont les classes d'équivalence de E, alors :

α) $\forall i$ [redacted] j, $\overline{a_i} \cap \overline{a_j} =$ [redacted]

β) $E =$ [redacted] $\overline{a_i}$

3) Relation d'ordre

Déf

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble non vide E.
$\mathcal{R}$ est dite relation d'ordre sur E si et ssi elle est à la fois [redacted], [redacted] et [redacted].

Relations d'ordres usuelles (à savoir)

1) $\leqslant$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.

2) $\subset$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$.

3) $/$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$.

Vocabulaire

Si $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur E, on dit que $(E,\mathcal{R})$ est un ensemble [redacted]

Déf

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur E.

1) $\mathcal{R}$ est dite relation d'ordre total si et ssi :

([redacted] $x, y \in E$, $x\mathcal{R}y$ [redacted] $y\mathcal{R}x$)

2) Dans le cas contraire, $\mathcal{R}$ est dite relation d'ordre [redacted]

Vocab:

1) Si $\mathcal{R}$ est dite relation d'ordre total, on dit que $(E,\mathcal{R})$ est [redacted]

2) Si $\mathcal{R}$ est dite relation d'ordre partiel, on dit que $(E,\mathcal{R})$ est [redacted]

Jusqu'à la fin du chapitre, $(E, \leqslant)$ sera un ensemble ordonné.

Attention ! $\leqslant$ désigne juste une relation d'ordre, et ça n'a rien à voir avec l'ordre usuel $\leqslant$ qu'on connait dans $\mathbb{R}$.

Déf

$(E, \leqslant)$ étant un ensemble ordonné.

Soient $M \in E$ et $A \subset E$.

1) On dit que M est un majorant de A si et ssi :

([redacted] $x \in A$, [redacted] $\leqslant$ [redacted])

2) On dit que M est un minorant de A si et ssi :

([redacted] $x \in A$, [redacted] $\leqslant$ [redacted])

3) A est dite partie majorée de E si et ssi :

([redacted] $M \in E$, $\forall x \in A$, [redacted] $\leqslant$ [redacted])

4) A est dite partie minorée de E si et ssi :

([redacted] $M \in E, \forall x \in A,$ [redacted] $\leq$ [redacted])

5) A est dite partie bornée de E si et ssi elle est à la fois majorée et minorée.

Càd : [redacted] $(m, M) \in E^2, \forall x \in A,$ { [redacted] $\leq$ [redacted]
[redacted] $\leq$ [redacted]

Déf

$(E, \leq)$ étant un ensemble ordonné.

Soit $A \subset E$.

1) i) Le plus grand élément de A (s'il existe) est l'élément a vérifiant :

$a \in$ [redacted]
$\forall x \in A,$ [redacted] $\leq$ [redacted]

ii) On le note m[redacted](A).

2) i) Le plus petit élément de A (s'il existe) est l'élément b vérifiant :

$b \in$ [redacted]
$\forall x \in A,$ [redacted] $\leq$ [redacted]

ii) On le note m[redacted](A).

Prop

On est dans l'ensemble ordonné $(\mathbb{R}, \leq)$.

1) Toute partie [redacted] de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

2) Toute partie [redacted] de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

Autrement dit

1) Si $\begin{cases} A \subset \mathbb{N} \\ A \text{ [redacted] } \emptyset \end{cases}$ alors m[redacted](A) existe.

2) Si $\begin{cases} A \subset \mathbb{N} \\ A \text{ [redacted] } \emptyset \\ A \text{ [redacted]} \end{cases}$ alors m[redacted](A) existe.

Fin