École polytechnique - Écoles normales supérieures

Concours d'admission 2014 - filière MP

Corrigé de l'épreuve de mathématiques A

Préliminaires sur les formes quadratiques

Remarque : l'hypothèse sur la caractéristique de $\mathbb{K}$ sert exclusivement à permettre la division par $2 = 1 + 1$, qui est essentielle pour définir $\tilde{q}$.

1. L'application $< a_1, \cdots, a_n >$ vérifie clairement la condition i) et l'application $\tilde{q}$ associée est la forme bilinéaire symétrique $(x, y) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_i x_i y_i$: $< a_1, \cdots, a_n >$ est bien une forme quadratique sur $\mathbb{K}^n$.

2. Pour φ forme bilinéaire bilinéaire symétrique sur V, posons $Q(\varphi) :\ x \longmapsto \varphi(x, x)$. Nous avons :

- si q est une forme quadratique sur V et x un élément de V :

$$Q(\tilde{q})(x) = \frac{1}{2}\left(q(2x) - q(x) - q(x)\right) = q(x)$$

- si φ est une forme bilinéaire symétrique sur V, l'application $q = Q(\varphi)$ vérifie i) et est associée à l'application

$$\tilde{q} :\ (x, y) \longmapsto \frac{1}{2}\left(\varphi(x + y, x + y) - \varphi(x, x) - \varphi(y, y)\right) = \varphi(x, y).$$

  q est donc une forme quadratique et $\widetilde{Q(\varphi)} = \varphi$.

ce qui prouve le résultat demandé.

3.(a) Soit q une forme quadratique sur V, $x \in V$ et X le vecteur colonne de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$. Notons $\Phi_{\mathcal{B}}(\tilde{q})\, X = (z_i)$. Nous avons :

$$\begin{aligned} \forall y \in V,\ \tilde{q}(x, y) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall i \in \{1, \cdots, n\},\ \tilde{q}(e_i, x) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \forall i \in \{1, \cdots, n\},\ z_i = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \Phi_{\mathcal{B}}(\tilde{q})X = 0 \end{aligned}$$

donc q est non dégénérée si et seulement si le noyau de $\Phi_{\mathcal{B}}(\tilde{q})$ est réduit à $\{0\}$, i.e. si et seulement si $\det\left(\Phi_{\mathcal{B}}(\tilde{q})\right) \neq 0$.

3.(b) En notant $\mathcal{B}_0$ la base canonique de V, nous avons

$$\Phi_{\mathcal{B}}(\widetilde{< a_1, \cdots, a_n >}) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

donc $< a_1, \cdots, a_n >$ est non dégénérée, puisque les a_i sont tous non nuls.

4.(a) Supposons qu'il existe un isomorphisme f de V sur V' tel que $q' \circ f = q$. Soit $\mathcal{B}$ une base de V et $\mathcal{B}'$ la base de V' image de $\mathcal{B}$ par f. Nous avons $\Phi_{\mathcal{B}'}(\tilde{q}') = \Phi_{\mathcal{B}}(\tilde{q})$ donc q' est également non dégénérée.

4.(b) L'application $y \longmapsto \tilde{q}(x, y)$ est une forme linéaire non nulle de V (car q est non dégénérée et $x \neq 0$) : son noyau $\{x\}^\perp$ est donc un hyperplan de V.

4.(c) Cet hyperplan H est supplémentaire de la droite $\mathbb{K}x$ si et seulement si x n'est pas élément de H, i.e. si et seulement si $q(x)$ est non nul.

5. $O(q)$ est un sous-groupe de $GL(V)$:

- l'application Id_V est élément de $O(q)$, donc $O(q)$ est non vide ;
- si $f, g \in O(q)$, $q \circ (f \circ g) = (q \circ f) \circ g = q \circ g = q$ donc $f \circ g \in O(q)$;
- si $f \in O(q)$, $q \circ f^{-1} = (q \circ f) \circ f^{-1} = q$ donc $f^{-1} \in O(q)$.

Supposons que $q' \circ f = q$, avec f isomorphisme de V sur V'. Nous avons alors, pour $g \in GL(V)$:

$$g \in O(q) \Longleftrightarrow q' \circ f \circ g = q' \circ f \Longleftrightarrow q' \circ \left(f \circ g \circ f^{-1}\right) = q' \Longleftrightarrow f \circ g \circ f^{-1} \in O(q')$$

L'application $g \longmapsto f \circ g \circ f^{-1}$ étant clairement un isomorphisme de groupe de $GL(V)$ sur $GL(V')$, sa restriction à $O(q)$ est un isomorphisme de groupe de $O(q)$ sur $O(q')$.

Première partie : existence de bases orthogonales

6.(a) Comme $q \longmapsto \tilde{q}$ est bijective, $\tilde{q}$ est nulle si et seulement si q est nulle. On en déduit qu'une forme quadratique non dégénérée est non nulle.

6.(b) On suppose ici que q est anisotrope et que V est un plan vectoriel. Il existe un vecteur non nul e_1 de V tel que $q(e_1) = 0$. Soit ε_2 un vecteur non colinéaire à e_1 et posons $\Phi_{(e_1,\varepsilon_2)}(\tilde{q}) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & b \end{pmatrix}$. Pour $x = x_1 e_1 + x_2 \varepsilon_2$, $q(x) = 2ax_1x_2 + bx_2^2$ et $\tilde{q}(e_1, x) = ax_2$. Comme q est non dégénérée, a est non nul et on peut définir $e_2 = -\dfrac{b}{2a^2} e_1 + \dfrac{1}{a}\varepsilon_2$: (e_1, e_2) est une base de V, $\Phi_{(e_1,e_2)}(\tilde{q}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et q est isométrique à h.

6.(c) Fixons e_1 tel que $q(e_1) = 0$. Comme q est non dégénérée, il existe e_2 tel que $\tilde{q}(e_1, e_2) \neq 0$: e_2 est en particulier non colinéaire à e_1 et la restriction de q à $P = \text{Vect}(e_1, e_2)$ est isométrique à h. Comme $h(\mathbb{K}^2) = \mathbb{K}$, $q(V) \supset q(P) = h(\mathbb{K}^2) = \mathbb{K}$ et q est surjective.

7.(a) La preuve se fait par récurrence sur la dimension de V :

- si V est de dimension 1, on choisit une base (e_1) de V et cette base est orthogonale pour q.
- supposons que V soit de dimension $n \geq 2$ et que le résultat ait été démontré pour toute forme non dégénérée définie sur un espace de dimension $n - 1$. Comme q est non nulle, il existe un vecteur e_1

tel que $q(e_1) \neq 0$. D'après la question 4c, $H = \{e_1\}^\perp$ est un supplémentaire de $\mathbb{K}e_1$. Notons q_H la restriction de q à H et fixons $(\varepsilon_2, \cdots \varepsilon_n)$ une base de H. La matrice de $\tilde{q}$ dans la base $(e_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ est égale à $\begin{pmatrix} q(e_1) & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$ où $S = \Phi_{(\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)}(\widetilde{q_H})$. Comme q est non dégénérée, S est inversible et q_H est également non dégénérée. On peut ainsi appliquer l'hypothèse de récurrence : il existe une base de H $(e_2, \cdots, e_n)$ orthogonale pour q_H et la famille $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base de V orthogonale pour q.

7.(b) Soit $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base orthogonale pour q et f l'isomorphisme de V sur $\mathbb{K}^n$ qui envoie la base (e_i) sur la base canonique (e'_i) de $\mathbb{K}^n$. En posant $a_i = q(e_i)$ pour tout i, nous avons pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ dans V :

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 = < a_1, \cdots, a_n > (f(x))$$

donc q est isométrique à $< a_1, \cdots, a_n >$, avec $a_1, \cdots, a_n$ non nuls car q est non dégénérée.

Deuxième partie : étude de $O(q)$ quand $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

8. Il existe une base (ε_i) orthogonale pour q. Quitte à réordonner les vecteurs, on peut supposer qu'il existe r compris entre 0 et n tel que $q(\varepsilon_i) > 0$ pour $i \leq r$ et $q(\varepsilon_i) < 0$ pour $i > r$. En posant

$$\begin{cases} \forall i \leq r,\ e_i = \dfrac{\varepsilon_i}{\sqrt{q(\varepsilon_i)}} \\ \forall i > r,\ e_i = \dfrac{\varepsilon_i}{\sqrt{-q(\varepsilon_i)}} \end{cases}$$

nous obtenons une base de V dans laquelle la matrice de $\tilde{q}$ est celle de $Q_{r,n-r}$ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$: q est donc isométrique à $Q_{r,s}$, avec $s = n - r$.

9. Nous avons :

$$\begin{aligned} M \in O_{r,s} &\iff f \in O(Q_{r,s}) \iff \forall X \in \mathbb{R}^n,\ Q_{r,s}(f(X)) = Q_{r,s}(X) \\ &\iff \forall X \in \mathbb{R}^n,\ {}^tX{}^tMI_{r,s}MX = {}^tX\, I_{r,s}X \\ &\iff \forall X, Y \in \mathbb{R}^n,\ {}^tX{}^tMI_{r,s}MY = {}^tX\, I_{r,s}Y && \text{(avec une égalité de polarité)} \\ &\iff {}^tMI_{r,s}M = I_{r,s} && \text{(en choisissant pour } X \text{ et } Y \text{ les vecteurs de la base canonique)} \end{aligned}$$

En particulier, si $M \in O_{r,s}$, $\det({}^tMI_{r,s}M) = \det(I_{r,s})$, donc $\det^2(M) = 1$: le déterminant de M vaut 1 ou à -1.

10. Comme $O(Q_{r,s})$ est un sous-groupe de $GL(\mathbb{R}^n)$, $O_{r,s}$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ (l'application j est un isomorphisme d'algèbre).

Comme l'application $\varphi : \ M \longmapsto {}^tMI_{r,s}M$ est continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même (chaque coefficient de $\varphi(M)$ est un polynôme en les coefficients de M), $O_{r,s}$ est fermé, comme image réciproque du fermé $\{I_{r,s}\}$ par φ. On peut remarquer que l'énoncé un peu maladroit : $O_{r,s}$ est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$, ce qui est plus précis qu'être un "fermé de $GL_n(\mathbb{R})$", puisque $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (cela aura son importance à la question suivante).

11. $O(n) = O_{n,0}$ et $O_{r,s}$ sont fermés, donc $O(n) \cap O_{r,s}$ est également un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme il est borné (les coefficients d'une matrice orthogonale sont éléments de $[-1,1]$, puisque chacune de ses colonne est de norme euclidienne égale à 1) et que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel normé de dimension finie, c'est un compact.

Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$ avec $A \in M_r(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{s,r}(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_s(\mathbb{R})$. Nous avons :

$$M \in K_{r,s} \iff \begin{cases} {}^tAA + {}^tCC = I_r \\ {}^tAB + {}^tCD = 0 \\ {}^tBB + {}^tDD = I_s \\ {}^tAA - {}^tCC = I_r \\ {}^tAB - {}^tCD = 0 \\ {}^tBB - {}^tDD = -I_s \end{cases} \iff \begin{cases} A \in O(r) \\ C = 0 \\ B = 0 \\ D \in O(s) \end{cases}$$

puisque pour une matrice rectangulaire réelle M, ${}^tMM = 0$ si et seulement si $M = 0$:

- si $M = 0$, ${}^tMM = 0$;
- si ${}^tMM = 0$, en notant $|| \ ||$ la norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$, nous avons :

  $$\forall X \in \mathbb{R}^n, \ ||MX||^2 = {}^tX{}^tMMX = 0$$

  donc $M = 0$.

On en déduit que l'application $\begin{array}{ccc} O(r) \times O(s) & \longrightarrow & O_{r,s} \\ (A,D) & \longmapsto & \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \end{array}$ est une bijection.

12. L'application $\theta \longmapsto \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: comme $\mathbb{R}$ est connexe par arcs, son image $SO(2)$ l'est également.

13.(a) Soit $f \in O(Q_{2,1})$. Pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$f(u) \in H \iff Q_{2,1}(f(u)) = -1 \iff Q_{2,1}(u) = -1 \iff u \in H$$

Comme f est un isomorphisme, $f(H) = H$.

13.(b) L'application $\begin{array}{ccc} (O_{2,1}, \circ) & \longrightarrow & (\mathbb{R}*, \cdot) \\ M & \longmapsto & \det(M) \end{array}$ est un morphisme de groupe continu : son noyau $SO_{2,1}$ est donc un sous-groupe fermé de $O_{2,1}$ ($\{1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^*$). On peut remarquer que comme $O_{2,1}$ est un fermé de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $SO_{2,1}$ est également un fermé de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

14.(a) Pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$Q_{2,1}\left(r_t(x,y,z)\right) = x^2 + (\operatorname{ch} t\, y + \operatorname{sh} t\, z)^2 - (\operatorname{sh} t\, y + \operatorname{ch} t\, z)^2 = x^2 + (\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t)y^2 - (\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t)z^2 = Q_{2,1}(x,y,z)$$

donc $r_t \in O(Q_{2,1})$. Comme $\det(r_t) = 1$ et $z_{r_t} = \operatorname{ch} t > 0$, $j(r_t) \in SO_{2,1}^+$ (à partir de cette question, l'énoncé identifie f et $j(f)$, puisque $SO_{2,1}^+$ est un ensemble de matrices et pas un ensemble d'endomorphismes).

14.(b) Pour $\theta \in \mathbb{R}$, notons ρ_θ la rotation d'axe $(0,0,1)$ définie par :

$$j(\rho_\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a clairement $j_\theta \in SO_{2,1}$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, donc $r_t \circ \rho_\theta \circ f \in SO_{2,1}$ pour tout $(\theta, t) \in \mathbb{R}^2$. La question revient donc à démontrer qu'il existe $(\theta, t) \in \mathbb{R}^2$ tels que $r_t \circ \rho_\theta \circ f(0,0,1) = (0,0,1)$, ce qui assurera que $z_{r_t \circ \rho_\theta \circ f} > 0$.

- choix de θ : en posant $M = \sqrt{x_f^2 + y_f^2}$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x_f = M \sin\theta$ et $y_f = M \cos\theta$. Nous avons alors $\rho_\theta \circ f(0,0,1) = (0, M, z_f)$.
- choix de t : nous cherchons $t \in \mathbb{R}$ tel que $r_t(0, M, z_f) = (0,0,1)$, ce qui s'écrit

$$\begin{cases} (\operatorname{ch} t)\, M + (\operatorname{sh} t)\, z_f = 0 \\ (\operatorname{sh} t)\, M + (\operatorname{ch} t)\, z_f = 1 \end{cases}$$

  Comme $(0,0,1) \in H$ et $f \in O(Q_{2,1})$, $(x_f, y_f, z_f) \in H$, donc $z_f^2 = 1 + x_f^2 + y_f^2 = 1 + M^2$. On en déduit que $z_k \geq 1$ et on peut poser $t = -\operatorname{Argch} z_k$.
  Nous avons alors $z_k = \operatorname{ch} t$ et $M^2 = \operatorname{sh}^2 t$, donc $M = -\operatorname{sh} t$ puisque $M \geq 0$ et $\operatorname{sh} t \leq 0$. Ainsi, nous avons défini un réel t tel que $r_t \circ \rho_\theta \circ f(0,0,1) = r_t(0, M, z_f) = (0,0,1)$.

14.(c) Notons $g = r_t \circ \rho_\theta \circ f$. La matrice $j(g)$ est de la forme $\begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{A}} & 0 \\ & & 0 \\ a & b & -1 \end{pmatrix}$. L'appartenance de g à $SO_{2,1}$ se traduit, grâce à la question 9, par les conditions $\det(A) = 1$, ${}^tA\, A = I_2$ et ${}^tA \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, A est une matrice de rotation et $a = b = 0$ (${}^tA$ est inversible). Autrement-dit, il existe $\theta' \in \mathbb{R}$ tel que $g = \rho_{\theta'}$, ce qui s'écrit sous la forme $\rho_{-\theta'} \circ r_t \circ \rho_\theta \circ f = Id_V$.

L'application $\begin{array}{rccc} \Phi_f : & [0,1] & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ & s & \longmapsto & j(\rho_{-s\theta'} \circ r_{st} \circ \rho_{s\theta} \circ f) \end{array}$ est alors continue, à valeur dans $SO_{2,1}^+$ et vérifie $\Phi_f(0) = f$ et $\Phi_f(1) = I_n$, ce qui prouve la connexité par arcs de $SO_{2,1}^+$. En effet, pour relier deux éléments $j(f)$ et $j(g)$ de $SO_{2,1}^+$ par un chemin continu tracé dans $SO_{2,1}^+$, il suffit d'utiliser l'arc paramétré :

$$\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & SO_{2,1}^+ \\ s & \longmapsto & \begin{cases} \Phi_f(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2 \\ \Phi_g(2-2s) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases} \end{array}$$

15. La partie $O_{2,1}$ est découpée en quatre "composantes", selon la valeur de $\det f$ et le signe de z_f. Nous posons donc :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P}_{1,1} & = & \{j(f) \in O_{2,1},\ \det f = 1 \text{ et } z_f > 0\} = SO_{2,1}^+ \\ \mathcal{P}_{1,-1} & = & \{j(f) \in O_{2,1},\ \det f = 1 \text{ et } z_f < 0\} \\ \mathcal{P}_{-1,1} & = & \{j(f) \in O_{2,1},\ \det f = -1 \text{ et } z_f > 0\} \\ \mathcal{P}_{-1,-1} & = & \{j(f) \in O_{2,1},\ \det f = -1 \text{ et } z_f < 0\} \end{array}$$

Ces quatre parties forment une partition de $O_{2,1}$ et chaque partie est homéomorphe à $SO_{2,1}$. En effet, posons :

$$A_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_{1,-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ A_{-1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A_{-1,-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On montre facilement que $\mathcal{P}_{i,j} = A_{i,j}\, SO_{2,1}^+$ pour tout $(i,j) \in \{-1,1\}$: ainsi chaque $\mathcal{P}_{i,j}$ est l'image de $SO_{2,1}^+$ par l'homéomorphisme $M \longmapsto A_{i,j}M$ et $O_{2,1}$ est la réunion de quatre sous-ensembles fermés disjoints deux à deux et connexes par arcs.

16. Considérons l'application surjective Φ qui à tout élément M de $O_{2,1}$ associe l'unique couple $(i,j) \in \{-1,1\}^2$ tel que $M \in \mathcal{P}_{i,j}$. On peut aussi écrire cette application sous la forme $M \longmapsto (\det(M), Z(M))$ en posant :

$$\forall f \in O(Q_{2,1}),\ Z(j(f)) = \begin{cases} 1 & \text{si } z_f > 0 \\ -1 & \text{si } z_f < 0 \end{cases}$$

Comme $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$ est isomorphe au groupe $(\{-1,1\}, \times)$, il suffit donc de démontrer que Φ est un morphisme multiplicatif pour obtenir le résultat demandé. Pour la première composante, cela résulte directement de la propriété $\det(MN) = \det M \times \det N$. C'est un peu plus compliqué pour l'application Z. Remarquons pour commencer que Z est continue sur $O_{2,1}$, comme composée des applications continues j^{-1}, $f \longmapsto z_f$ et $z \in \mathbb{R}^* \longmapsto \dfrac{z}{|z|}$.

Soient M et N sont deux éléments de $O_{2,1}$ et posons $\Phi(M) = (i,j)$ et $\Phi(N) = (i',j')$. Il existe deux applications continues γ et δ de $[0,1]$ dans $O_{2,1}$ telles que $\gamma(0) = M$, $\gamma(1) = A_{i,j}$, $\delta(0) = N$ et $\delta(1) = A_{i',j'}$. L'application $s \longmapsto Z(\gamma(s) \times \delta(s))$ est continue de $[0,1]$ dans $\{0,1\}$: elle est donc constante. On en déduit :

$$Z(MN) = Z(A_{i,j} \times A_{i',j'})$$

Comme $Z(M) = j$ et $Z(N) = j'$, il reste à vérifier que $Z(A_{i,j} \times A_{i',j'}) = jj'$, ce qui est évident puisque les matrices considérées sont diagonales : $z_{A_{i,j} \times A_{i',j'}} = z_{A_{i,j}} \times z_{A_{i',j'}} = jj' \in \{-1,1\}$.

Troisième partie

17.(a) L'application $\varphi = \widetilde{q \perp q'}$: $((x,x'),(y,y')) \longmapsto \tilde{q}(x,y) + \tilde{q}'(x',y')$ est une forme bilinéaire sur $V \times V'$ et $q \perp q'$ vérifie la propriété i), donc $q \perp q'$ est une forme quadratique sur $V \times V'$. Si un vecteur (x,x') de $V \times V'$ vérifie :

$$\forall\, (y,y') \in V \times V',\ \varphi((x,x'),(y,y')) = 0$$

alors

$$\begin{cases} \forall\, y \in V,\ \tilde{q}(x,y) = \varphi((x,x'),(y,0)) = 0 \\ \forall\, y' \in V',\ \tilde{q}'(x',y') = \varphi((x,x'),(0,y')) = 0 \end{cases}$$

donc $(x,x') = (0,0)$ car q et q' sont non dégénérée : on en déduit que $q \perp q' \in \mathcal{Q}(V \times V')$.

L'application f : $((x,x'),x'') \longmapsto (x,(x',x''))$ est un isomorphisme d'espace vectoriel de $(V \times V') \times V''$ sur $V \times (V' \times V'')$ et vérifie $(q \perp q') \perp q'' = \big[q \perp (q' \perp q'')\big] \circ f$: les deux formes quadratiques sont bien isométriques.

17.(b) Soit f' un isomorphisme de V' sur V'' tel que $q'' \circ f = q'$. L'application f : $(x,y) \longmapsto (x, f'(y))$ est alors un isomorphisme de $V \times V'$ sur $V \times V''$ qui vérifie $(q \perp q'') \circ f = q \perp q'$: les formes quadratiques $q \perp q'$ et $q \perp q''$ sont isométriques dès que q' et q'' le sont.

17.(c) L'application f : $(x',x'') \longmapsto x' + x''$ est un isomorphisme de $V' \times V''$ sur V et pour $(x',x'') \in V' \times V''$:

$$q \circ f(x',x'') = q(x'+x'') = q(x) + q(x') + 2\,\underbrace{\tilde{q}(x',x'')}_{=0} = q'(x') + q''(x'') = (q' \perp q'')(x',x'')$$

donc q et $q' \perp q''$ sont isométriques.

18.(a) Pour $y \in V$, $q(s_x(y)) = q(y) - 4\dfrac{\tilde{q}(x,y)}{q(x)}\tilde{q}(x,y) + 4\left(\dfrac{\tilde{q}(x,y)}{q(x)}\right)^2 q(x) = q(y)$ et $q(-s_x(y)) = q(s_x(y)) = q(y)$ donc s_x et $-s_x$ appartiennent à $O(q)$.

18.(b) $s_{w-v} \in O(q)$ et on vérifie facilement que $s_{w-v}(v) = w$:

$$\begin{aligned}
s_{w-v}(v) &= v - 2\frac{\tilde{q}(w-v,v)}{q(w-v)}(w-v) \\
&= v - 2\frac{\tilde{q}(w,v) - q(v)}{q(w) + q(v) - 2\tilde{q}(v,w)}(w-v) \\
&= v - \frac{\tilde{q}(w,v) - q(v)}{q(v) - \tilde{q}(v,w)}(w-v) \qquad \text{car } q(v) = q(w) \\
&= w
\end{aligned}$$

18.(c) $q(v-w) = 0$, donc $2q(v) - 2\tilde{q}(v,w) = 0$, soit $q(v) = \tilde{q}(v,w)$. On a alors $q(v+w) = 4q(v) \neq 0$, donc $-s_{v+w} \in O(q)$ et $-s_{v+w}(v) = -v + 2\dfrac{\tilde{q}(v+w,v)}{q(v+w)}(v+w) = -v + \dfrac{2q(v)}{4q(v)}(v+w) = w$.

Dans tous les cas, nous avons donc construit $f \in O(E)$ tel que $f(v) = w$.

19. Démontrons le résultat par récurrence sur la dimension n de V_3.

- si $n = 0$, $q_1 \perp q_3 = q_1$ et $q_2 \perp q_3 = q_2$ donc le résultat est évident.
- soit $n \geq 1$ et supposons que le résultat ait été démontré quand V_3 est de dimension $n-1$. Nous partons donc de trois formes quadratiques $q_i \in \mathcal{Q}(V_i)$ telles que $q_1 \perp q_3 \cong q_2 \perp q_3$, avec V_3 de dimension n. soit f un isomorphisme de $V_1 \times V_3$ sur $V_2 \times V_3$ tel que $q_1 \perp q_3 = (q_2 \perp q_3) \circ f$. Comme q_3 est non nulle, il existe $e \in V_3$ tel que $q_3(e) \neq 0$. Posons $f(0_{V_1}, e) = (x,y)$. Nous avons :

  $$q_2 \perp q_3(x,y) = (q_1 \perp q_3)(0,e) = q_3(e) = (q_2 \perp q_3)(0,e)$$

  Si $(x,y) \neq (0_{V_2}, e)$, nous pouvons appliquer la question précédente en posant $q = q_2 \perp q_3$, $v = (x,y)$ et $w = (0_{V_2}, e)$, puisqu'on a bien $q(v) = q(w) = q_3(e) \neq 0$ et $v \neq w$: il existe $g \in O(q_2 \perp q_3)$ tel que $g(x,y) = (0_{V_2}, e)$. Si $(x,y) = (0_{V_2}, e)$, le résultat subsiste en choisissant pour g l'application identité. Posons alors $h = g \circ f$: h est un isomorphisme de $V_1 \times V_3$ sur $V_2 \times V_3$ tel que $q_1 \perp q_3 = (q_2 \perp q_3) \circ h$ et $h(0_{V_1}, e) = (0_{V_2}, e)$.

  Considérons alors les hyperplans $H_1 = \{(0_{V_1}, e)\}^{\perp}$ et $H_2 = \{(0_{V_2}, e)\}^{\perp}$ respectivement dans $V_1 \times V_3$ et $V_2 \times V_3$. Nous avons facilement :

  - $\begin{cases} H_1 = V_1 \times \{e\}^{\perp} \\ H_2 = V_2 \times \{e\}^{\perp} \end{cases}$ puisque l'hyperplan $V_i \times \{e\}^{\perp}$ est contenu dans l'hyperplan H_i.
  - $h(H_1) \subset H_2$ car pour $(x,y) \in H_1$:

    $$\widetilde{q_2 \perp q_3}(h(x,y), (0_{V_2}, e)) = \widetilde{q_2 \perp q_3}(h(x,y), h(0_{V_1}, e)) = \widetilde{q_1 \perp q_3}((x,y), (0_{V_1}, e)) = 0$$

  - $h(H_1) = H_2$ car H_1 et H_2 ont même dimension finie (h est un isomorphisme).

Notons alors $V_3' = \{e\}^\perp$, q_3' la restriction de q_3 à V_3' et h' la restriction de h à H_1 (h' est un isomorphisme de H_1 sur H_2) . Nous avons alors :

$$\forall (x,y) \in H_1,\ (q_2 \perp q_3')(h'(x,y)) = (q_2 \perp q_3)(h(x,y)) = (q_1 \perp q_3)(x,y) = (q_1 \perp q_3')(x,y)$$

donc $q_1 \perp q_3' \cong q_2 \perp q_3'$. Comme V_3' est de dimension $n-1$, l'hypothèse de récurrence s'applique et $q_1 \cong q_2$.

20. Prouvons tout d'abord l'existence du couple (q_{an}, m) par récurrence sur la dimension de V.

a) Si V est de dimension 0, on pose $m = 0$ et $q_{an} = q$, qui est bien une forme anisotrope sur l'espace vectoriel $\{0\}$;

b) Supposons que $q \in \mathcal{Q}(V)$, où V est de dimension $n \geq 2$, et que le résultat ait été démontré pour toute forme non dégénérée sur un espace de dimension comprise entre 1 et n. Si q est anisotrope, on pose $q_{an} = q$ et $m = 0$. Sinon, on choisit $x \in V \setminus \{0\}$ tel que $q(x) = 0$ et on choisit $y \in V \setminus \{x\}^\perp$ (c'est possible car $\{x\}^\perp$ est un hyperplan de V. Comme x est isotrope, $x \in \{x\}^\perp$ et (x,y) est une famille libre : soit P le plan qu'elle engendre. Notons $W = P^\perp = \{z \in V,\ \tilde{q}(x,z) = \tilde{q}(y,z) = 0\} = \{x\}^\perp \cap \{y\}^\perp$. Comme $x \in \{x\}^\perp$ et $x \notin \{y\}^\perp$, les deux hyperplans $\{x\}^\perp$ et $\{y\}^\perp$ sont distincts : leur intersection W est donc de dimension $n-2$. Montrons que P et W sont supplémentaires, ce qui revient à montrer que leur intersection est réduite à $\{0\}$, puisque la somme de leur dimension est égale à la dimension de V. Un vecteur z de $P \cap W$ s'écrit $z = \alpha x + \beta y$, avec $\tilde{q}(x,z) = \tilde{q}(z,y) = 0$. Ceci donne $\beta\,\tilde{q}(x,y) = 0$, soit $\beta = 0$ car $\tilde{q}(x,y) \neq 0$, puis $\alpha\,\tilde{q}(x,y) = 0$, soit $\alpha = 0$ et $z = 0$.

En notant q_1 la restriction de q à W et q_2 la restriction de q à P, nous avons :

- $q \cong q_1 \perp q_2$ d'après la question 18c) ;
- $q_2 \cong h$ d'après la question 6b) ;
- d'après l'hypothèse de récurrence, il existe $m' \in \mathbb{N}$ et q_{an} forme quadratique anisotrope telle que $q_1 \cong q_{an} \perp m' \cdot h$;
- $q_1 \perp q_2 \cong q_1 \perp h$ d'après la question 17b)
- $q_1 \perp h \cong (q_{an} \perp m' \cdot h) \perp h$ d'après la question 17b) (par symétrie) ;
- $(q_{an} \perp m' \cdot h) \perp h \cong q_{an} \perp (m'+1) \cdot h$ d'après la question 17a).

Par transitivité de la relation $\cong$, nous avons obtenu une forme quadratique anisotrope q_{an} et un entier naturel $m = m'+1$ tel que $q \cong q_{an} \perp m \cdot h$

Montrons maintenant l'unicité (à isomorphisme près) du couple (q_{an}, m) : supposons qu'il existe deux formes quadratiques anisotropes q_{an}, q_{an}' et deux entiers naturels m, m' tels que

$$q_{an} \perp m \cdot h \cong q_{an}' \perp m' \cdot h.$$

Nous voulons montrer que $m = m'$ et que $q_{an} \cong q_{an}'$: cela se fait une nouvelle fois par récurrence sur m.
a) Si $m = 0$, $q_{an} \perp m \cdot h = q_{an}$ est anisotrope, donc $q_{an}' \perp m' \cdot h$ l'est également, ce qui impose $m' = 0 = m$ et $q_{am} \cong q_{an}'$.

b) Supposons que $m \geq 1$ et que le résultat ait été démontré pour $m-1$. Par symétrie, m' est également non nul. Nous avons donc :

$$(q_{an} \perp (m-1) \cdot h) \perp h \cong (q_{an}' \perp (m'-1) \cdot h) \perp h$$

donc

$$q_{an} \perp (m-1) \cdot h \cong q_{an}' \perp (m'-1) \cdot h$$

d'après la question 19 : l'hypothèse de récurrence donne donc $m-1 = m'-1$ et $q_{an} \cong q_{an}'$.