Q) 1) Nature de $\sum_{n\geq 1} \mathrm{sh}\left(\frac{1}{n}\right)$?

2) - - - - - - $\sum_{n\geq 1} \left(\mathrm{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right)$?

Rappel :

$$\operatorname{Sh}(x) \underset{x \to 0}{=} x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$\sin(x) \underset{x \to 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

Rappel :

$$\mathrm{Sh}(x) \underset{x \to 0}{=} x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$\sin(x) \underset{x \to 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

Sol :

1) $\mathrm{sh}\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$

Or $\sum \frac{1}{n}$ DIV alors $\sum \mathrm{sh}\left(\frac{1}{n}\right)$ DIV.

2) $\left(\mathrm{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right) \underset{n}{\sim} \frac{1}{6n^3}$

Or $\sum \frac{1}{6n^3}$ CV (Riemann : $\alpha = 3 > 1$)

Donc $\sum \left(\mathrm{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{2}{n}\right)$ CV

Ex :

Soit σ une permutation de $\mathbb{N}^*$.

1) Nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sigma(n)}$?

2) " " $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(\sigma(n))^2}$?

Rappel

Soit $\sigma : \mathbb{N}^* \longrightarrow I$ bijective.

On a :

1) $(a_i)_{i\in I}$ sommable $\Longleftrightarrow$ (la série $\sum\limits_{n\geq 1} a_{\sigma(n)}$ CV)

2) Dans ce cas :

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{\sigma(n)}$$

On a $\sigma : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ bijection.

Alors :

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sommable $\Longleftrightarrow \sum\limits_{n\geq 1} a_{\sigma(n)}$

Ex :

Soit σ une permutation de $\mathbb{N}^*$.

1) Nature de $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sigma(n)}$?

2) " " $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(\sigma(n))^2}$?

Sol :

$\sigma : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ bijective.

1) Alors :

$\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sommable $\Longleftrightarrow$ la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sigma(n)}$ CV

Or $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas sommable car $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ Div

D'où la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sigma(n)}$ Div

Ex :

Soit σ une permutation de $\mathbb{N}^*$.

1) Nature de $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sigma(n)}$?

2) " " $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(\sigma(n))^2}$?

Sol :

$\sigma : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ bijective.

2) Alors :

$\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sommable $\Longleftrightarrow$ la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(\sigma(n))^2}$ CV

Or $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sommable car $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ CV

D'où la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(\sigma(n))^2}$ CV

Exo :

Soit $0 < r < 1$.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

Montrer l'existence de la somme suivante

et déterminer sa valeur :

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} r^{|m|} e^{im\theta}$$

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right) \text{ existe} \iff \left(\text{La série } \sum_{n\geq 0} a_n \text{ CV}\right)$$

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n\right) \text{ existe} \iff \left(\text{La famille } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est sommable}\right)$$

$$\left(\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} e^{-x}\right) \text{ existe} \iff \boxed{\text{L'intégrale généralisée } \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} e^{-x}\,dx \text{ CV}}$$

$0 < r < 1$

Sol

Pour montrer l'existence de la somme $\sum_{m\in\mathbb{Z}} r^{|m|} e^{im\theta}$

il suffit de montrer que la famille $\left(r^{|m|} e^{im\theta}\right)_{m\in\mathbb{Z}}$

est sommable.

Piste 1

Càd, M que la famille $\left(\left|r^{|m|} e^{im\theta}\right|\right)_{\theta\in\mathbb{Z}}$ sommable

Càd $\left(r^{|m|}\right)_{m\in\mathbb{Z}}$ sommable (f^{lle} positive)

$\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}^{-*}$ partition de $\mathbb{Z}$.

$\boxed{\text{etc...}}$

$\boxed{\text{Fin Piste 1}}$

Piste 2 (Mieux)

$\left(r^{|m|}e^{im\theta}\right)_{\theta\in\mathbb{Z}}$ famille (de complexes)

$\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}^{-*}$ est une partition de $\mathbb{Z}$.

Alors :

1) $\left(r^{|m|}e^{im\theta}\right)_{m\in\mathbb{Z}}$ sommable $\Longleftrightarrow$ $\left(\left(r^{|m|}e^{im\theta}\right)_{m\in\mathbb{N}}\right.$ et $\left.\left(r^{|m|}e^{im\theta}\right)_{m\in\mathbb{Z}^{-*}}\right)$ sont sommable(s)

2) Dans ce cas on a :

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} r^{|m|}e^{im\theta} = \sum_{m\in\mathbb{N}} r^{|m|}e^{im\theta} + \sum_{m\in\mathbb{Z}^{-*}} r^{|m|}e^{im\theta}$$

Démo de 1°)

$(r^{|m|}e^{im\theta})_{m\in\mathbb{N}}$ sommable $\underset{\text{Complexe}}{\Longleftrightarrow}$ la série $\sum_{n\geq 0} r^{|m|}e^{im\theta}$ ACV

$\Longleftrightarrow \sum_{n\geq 0} r^m$ CV

Ce qui est vrai ; série géom ($0<r<1$)

Rappel

$\sigma : \mathbb{N}^* \to I$ bij ; $(a_i)_{i\in I}$ complexes.

$(a_i)_{i\in I}$ sommable $\Leftrightarrow \sum_{n\geq 1} a_{\sigma(n)}$ ACV

Dans le cas on a : $\sum_{i\in I} a_i = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{\sigma(n)}$

$(r^{|m|}e^{im\theta})_{m\in\mathbb{Z}^{-*}}$ sommable $\Longleftrightarrow$ la série $\sum_{n\geq 1} r^{|-n|}e^{-im\theta}$ ACV

$\sigma : n \longmapsto (-n)$ bij de $\mathbb{N}^*$ vers $\mathbb{Z}^{-*}$.

$$\Longleftrightarrow \sum_{n\geq 1} r^n \text{ CV}$$

Ce qui est vrai ($0<r<1$ sér-géom)

Enfin, $\left(r^{|m|}e^{im\theta}\right)_{m\in\mathbb{Z}}$ sommable.

Et on a:

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} r^{|m|}e^{im\theta} = \underbrace{\sum_{m\in\mathbb{N}} r^{|m|}e^{im\theta}}_{\|} + \underbrace{\sum_{m\in\mathbb{Z}^{-*}} r^{|m|}e^{im\theta}}_{\|}$$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} r^{|m|}e^{im\theta} + \sum_{n=1}^{+\infty} r^{|-n|}e^{-in\theta}$$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} r^{m}e^{im\theta} + \sum_{n=1}^{+\infty} r^{n}e^{-in\theta}$$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} \left(re^{i\theta}\right)^m + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(re^{-i\theta}\right)^n$$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} (re^{i\theta})^m + \sum_{n=1}^{+\infty} (re^{-i\theta})^n$$

$$\sum_{n=N}^{+\infty} q^n = \frac{q^N}{1-q}$$

Si $|q|<1$

Rappel

$$= \frac{1}{1-re^{i\theta}} + \frac{re^{-i\theta}}{1-re^{-i\theta}}$$

$$= \frac{1-r^2}{(1-re^{i\theta})(1-re^{-i\theta})}$$

$$= \frac{1-r^2}{1-r(e^{i\theta}+e^{-i\theta})+r^2}$$

$$= \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

Scanned with CamScanner