Correction

d'après Mines de Sup, commune 2001

Partie I

Suivons le lapin blanc et entrons dans la matrice…

1. $E(s)E(t) = (I + s.A + \frac{s^2}{2}.A^2)(I + t.A + \frac{t^2}{2}.A^2) = I + (s+t).A + \frac{(s+t)^2}{2}.A^2$ car $A^3 = 0$.

2. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ on montre sans difficultés : $\forall t \in \mathbb{R}, E(t)^n = E(nt)$.

3. On observe $E(t) \times E(-t) = E(0) = I$ donc $E(t)$ est inversible d'inverse $E(-t)$.

4. Supposons $\alpha.I + \beta.A + \gamma.A^2 = 0$.

   En multipliant par A^2 on obtient : $\alpha.A^2 = 0$ (car $A^3 = 0$) donc $\alpha = 0$ puisque $A^2 \neq 0$.
   En reprenant la relation initiale et en la multipliant par A on obtient $\beta = 0$.
   Enfin la relation initiale donne maintenant $\gamma = 0$. Finalement (I, A, A^2) est libre.

5. Supposons $E(s) = E(t)$ i.e. $I + s.A + \frac{s^2}{2}.A^2 = I + t.A + \frac{t^2}{2}.A^2$.

   1ère méthode : Puisque (I, A, A^2) est libre on peut identifier les coefficients et conclure $s = t$.

   2ème méthode : On a $(s-t).A + \frac{s^2 - t^2}{2}A^2 = 0$ et (A, A^2) est libre, donc $s - t = 0$ i.e. $s = t$.

   Finalement $E : t \to E(t)$ est injective.

6. $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ et $A^3 = 0$ donc A est nilpotente d'indice 3. $E(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & t + \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Partie II

1. Soit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

   $x \in F \Leftrightarrow f(x) = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 - 6x_2 = 2x_1 \\ x_1 - x_2 = 2x_2 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = 3x_2$. $x \in G \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 - 6x_2 = x_1 \\ x_1 - x_2 = x_2 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = 2x_2$.

   Par suite $F = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1)$ et $G = \mathrm{Vect}(\varepsilon_2)$ avec $\varepsilon_1 = (3,1)$ et $\varepsilon_2 = (2,1)$.
   F et G sont des droites vectorielles.
   Soit $x \in F \cap G$. On a $f(x) = 2x$ et $f(x) = x$ donc $x = 0$ puis $F \cap G = \{0\}$.
   De plus $\dim F + \dim G = 2 = \dim \mathbb{R}^2$ donc F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.

2. $f(\varepsilon_1) = 2\varepsilon_1$ et $f(\varepsilon_2) = \varepsilon_2$ donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_\varepsilon}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Soit $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_e} \mathcal{B}_\varepsilon \in GL_2(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_\varepsilon}(f)$.

   La formule de changement de base donne : $A = PDP^{-1}$.
   $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

4. De manière immédiate : $D = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   1ère méthode : Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: $A^n = PD^nP^{-1}$.
   2ème méthode : $A^n = (PDP^{-1})(PDP^{-1})...(PDP^{-1}) = PD(P^{-1}P)...(P^{-1}P)DP^{-1} = PD^nP^{-1}$.
   3ème méthode : $A^n = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_e}(f^n)$, $D^n = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_\varepsilon}(f^n)$ et la formule de changement conclu.

   $A^n = \begin{pmatrix} 3.2^n - 2 & -6.2^n + 6 \\ 2^n - 1 & -2.2^n + 3 \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Partie III

1. $MD = M^3 = DM$. $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $MD = \begin{pmatrix} 2a & b \\ 2c & d \end{pmatrix}$ et $DM = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ c & d \end{pmatrix}$ donc $MD = DM \Rightarrow b = c = 0$ et donc M est diagonale. De plus on a alors $M^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & d^2 \end{pmatrix}$ d'où $a = \pm\sqrt{2}$ et $b = \pm 1$.
2. $M^2 = P^{-1}XPP^{-1}XP = P^{-1}X^2P$ donc $M^2 = D \Leftrightarrow X^2 = PDP^{-1} \Leftrightarrow X^2 = A$.
Donc les solutions de l'équation $X^2 = A$ sont de la forme $X = PMP^{-1}$ avec M solution de l'équation $M^2 = D$ i.e. M de la forme $M_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ou $M_4 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
3. $m = 4$ et $X_i = PM_iP^{-1}$.
$S = X_1 + \cdots + X_4 = P(M_1 + \cdots + M_4)P^{-1} = P \times O_2 \times P^{-1} = O_2$ et
$P = PM_1P^{-1}PM_2P^{-1}PM_3P^{-1}PM_4P^{-1} = PM_1M_2M_3M_4P^{-1} = PD^2P^{-1} = A^2$.

Partie IV

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ et $n \in \mathbb{N}$.
La fonction $f : t \mapsto \mathrm{e}^t$ est $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $I = [-\alpha, \alpha]$ et $\forall k \in \{0,1,\ldots,n\}, f^{(k)}(t) = \mathrm{e}^t$, $f^{(k)}(0) = 1$ donc la partie régulière du développement de Taylor de f en 0 est $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$.
Puisque $\left|f^{(n+1)}(t)\right| = \mathrm{e}^t \le \mathrm{e}^\alpha$, l'inégalité de Taylor-Lagrange donne : $\forall t \in I, \left|\mathrm{e}^t - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}\right| \le \frac{\mathrm{e}^\alpha}{(n+1)!}$.
Quand $n \to +\infty$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \to \mathrm{e}^t$ pour tout $t \in I$.
Enfin puisque ceci est vrai pour tout $\alpha > 0$, on peut conclure : $\forall t \in \mathbb{R}, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \to \mathrm{e}^t$.
2. $a_n(t) = 3.\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} - 2\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$, $b_n(t) = -6.\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} + 6\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$, $c_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$ et
$d_n(t) = -2.\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} + 3\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$.
3. $E(t) = \begin{pmatrix} 3\mathrm{e}^{2t} - 2\mathrm{e}^t & -6\mathrm{e}^{2t} + 6\mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^t & -2\mathrm{e}^{2t} + 3\mathrm{e}^t \end{pmatrix}$.
4. $E(t) = \mathrm{e}^{2t}.Q + \mathrm{e}^t.R$ avec $Q = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.
5. $Q^2 = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = Q$, $R^2 = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = R$, $QR = 0 = RQ$.
q et r sont des projections vectorielles.
Puisque $Q + R = I$, ces projections sont complémentaires.
De part les matrices Q et R , on observe que $\operatorname{Im} q \subset F$ et $\operatorname{Im} r = \ker q \subset G$.
Puisque $\operatorname{Im} q$ et $\ker q$ sont supplémentaires et que F et G le sont aussi, un argument de dimension permet de justifier $\operatorname{Im} q = F$ et $\ker q = G$.
Ainsi q est la projection vectorielle sur F parallèlement à G et r est la projection complémentaire associée.
Notons, qu'il existe plusieurs démarches possibles pour déterminer $\operatorname{Im} q$ et $\ker q$.
6. $E(s)E(t) = (\mathrm{e}^{2s}.Q + \mathrm{e}^s R)(\mathrm{e}^{2t}.Q + \mathrm{e}^t.R) = \mathrm{e}^{2(s+t)}.Q + \mathrm{e}^{s+t}.R = E(s+t)$ en vertu des relations de 5.
Comme précédemment : $E(t)^n = E(nt)$ et $E(t)^{-1} = E(-t)$.
La famille (Q, R) est libre donc $E(s) = E(t) \Rightarrow \mathrm{e}^s = \mathrm{e}^t \Rightarrow s = t$.
Donc $E : t \mapsto E(t)$ est injective.