

# CNC - 2019 - MP - Math 2

## Problème

2.1

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \dots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \dots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{a_n+b_2} & \frac{1}{a_n+b_2} & \dots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

On a  $a_{i_1} = a_{i_2}$  et  $i_1 \neq i_2$

Alors les deux lignes  $L_{i_1}$  et  $L_{i_2}$  sont égales

D'où  $\Delta_n = 0$

2.2  $\left( \prod_{1 \leq j \leq n-1} (x - b_j) \right) \wedge \left( \prod_{1 \leq k \leq n} (x + a_k) \right) = 1$  ?

$\left( \forall 1 \leq j \leq n-1, \forall 1 \leq k \leq n, b_j \neq -a_k \right)$  (car  $b_j + a_k \neq 0$ )

$\Rightarrow \left( \forall 1 \leq j \leq n-1, \forall 1 \leq k \leq n, (x - b_j) \wedge (x + a_k) = 1 \right)$

D'où  $\left( \prod_{1 \leq j \leq n-1} (x - b_j) \right) \wedge \left( \prod_{1 \leq k \leq n} (x + a_k) \right) = 1$

Remarque

Les polynômes  $\left( \prod_{1 \leq j \leq n-1} (x - b_j) \right)$  et  $\left( \prod_{1 \leq k \leq n} (x + a_k) \right)$  sont scindés et n'ont aucune racine commune  
 Donc ils sont premiers entre eux

$$2.3.1 \quad R(x) = \frac{\prod_{1 \leq j \leq n-1} (x - b_j)}{\prod_{1 \leq k \leq n} (x + a_k)} .$$

Pour tout  $1 \leq k \leq n$ ,  $(-a_k)$  est une racine de  $\prod_{1 \leq k \leq n} (x + a_k)$

et rien est pas pour  $\prod_{1 \leq j \leq n-1} (x - b_j)$ .

D'où les pôles de  $R(x)$  sont les  $(-a_k)$ , pour tout  $1 \leq k \leq n$ .

En plus, ils sont tous simples car tous racines simples de  $\prod_{1 \leq k \leq n} (x + a_k)$ .

2.3.2

$$R(x) = \frac{\prod_{1 \leq j \leq n-1} (x - b_j)}{\prod_{1 \leq j \leq n} (x + a_j)} \in \mathbb{R}(x) \text{ et } d^{\circ}(R) = -1 < 0$$

en plus tous ses pôles,  $(-a_j)_{1 \leq j \leq n}$ , sont simples

Alors la décomposition en éléments simples est de la forme :

$$R(x) = \sum_{k=1}^n \frac{d_k}{x + a_k}$$

(12)

$$R(x) = \frac{\prod_{1 \leq j \leq n-1} (x - b_j)}{\prod_{1 \leq j \leq n} (x + a_j)} = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{x + a_k}$$

(12)

Soit  $1 \leq k \leq n$ ,  $\alpha_k = ?$

Multiplicons dans (12) par  $(x + a_k)$ , puis faisons tendre  $x$  vers  $(-a_k)$ , on obtient :

$$\alpha_k = \frac{\prod_{1 \leq j \leq n-1} (-a_k - b_j)}{\prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq k}} (-a_k + a_j)} = \frac{(-1)^{n-1} \prod_{j=1}^{n-1} (a_k + b_j)}{(-1)^{n-1} \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq k}} (a_k - a_j)}$$

c/c :

$$\forall 1 \leq k \leq n, \alpha_k = \frac{\prod_{j=1}^{n-1} (a_k + b_j)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (a_k - a_j)}$$

## 2.4.1

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \dots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \dots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \dots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

Notons  $L'_1, \dots, L'_n$  ces lignes.

$$\text{Notons } \Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \dots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \dots & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ R(b_2) & R(b_2) & \dots & R(b_n) \end{vmatrix}$$

La dernière ligne est :

$$\left( \left[ \frac{d_1}{a_1+b_2} + \dots + \frac{d_n}{a_n+b_2} \right] \dots \left[ \frac{d_1}{a_1+b_n} + \dots + \frac{d_n}{a_n+b_n} \right] \right)$$

$$= d_1 \underbrace{\left( \frac{1}{a_1+b_2} \dots \frac{1}{a_1+b_n} \right)}_{L'_1} + \dots + d_n \underbrace{\left( \frac{1}{a_n+b_2} \dots \frac{1}{a_n+b_n} \right)}_{L'_n}$$

$$= d_1 L'_1 + \dots + d_{n-1} L'_{n-1} + d_n L'_n$$

Avec  $L_n \leftarrow L_n - (d_1 L_1 + \dots + d_{n-1} L_{n-1})$  dans

le déterminant  $\Delta$  on obtient :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \dots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \dots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d_n}{a_n+b_1} & \frac{d_n}{a_n+b_2} & \dots & \frac{d_n}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \Delta = d_n \begin{vmatrix} \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \dots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \dots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \dots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta = d_n \Delta_n} \quad \text{CQFD}$$


---



2.4.2

$$\text{On a } d_n \Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \dots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \dots & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ R(b_1) & R(b_2) & \dots & R(b_n) \end{vmatrix}$$

$$\text{or } R(b_1) = \dots = R(b_{n-1}) = 0$$

$$\text{Ainsi } d_n \Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \dots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \dots & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \quad R(b_n) \end{vmatrix}$$

En développant suivant la dernière ligne, on a :

$$d_n \Delta_n = R(b_n) \Delta_{n-1}$$

2.4.3

$$(ii) \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)} - \frac{1}{(a_2+b_1)(a_1+b_2)} \\ &= \frac{(a_2+b_1)(a_1+b_2) - (a_1+b_2)(a_2+b_1)}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_2+b_1)(a_1+b_2)} \end{aligned}$$

$$\Delta_2 = \frac{a_2 b_2 + a_1 b_1 - a_1 b_2 - a_2 b_1}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)(a_2 + b_1)(a_1 + b_2)}$$

(ii) All que :

$$\forall n \geq 2, \Delta_n = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n} (a_i + b_j)}$$

Raisonnons par récurrence sur  $n \geq 2$ .

Initialisation : Pour  $n = 2$

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \frac{(a_2 - a_1)b_2 + (a_1 - a_2)b_1}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)(a_2 + b_1)(a_1 + b_2)} \\ &= \frac{(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)(a_2 + b_1)(a_1 + b_2)} \\ &= \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq 2} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq 2} (a_i + b_j)} \end{aligned}$$

Hérédité :

Soit  $n \geq 2$ .

Supposons que

$$\Delta_{n-1} = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n-1} (a_i + b_j)}$$

Et montrons que

$$\Delta_n = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n} (a_i + b_j)}$$

On a :

$$\Delta_n = \frac{R(b_n)}{d_n} \Delta_{n-1}$$

$$= \frac{\prod_{j=1}^{n-1} (b_n - b_j)}{\prod_{k=1}^n (b_n + a_k)} \cdot \frac{\prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq n}} (a_n - a_j)}{\prod_{j=1}^{n-1} (a_n + b_j)} \cdot \Delta_{n-1}$$

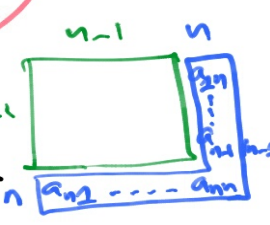
H.R.

$$= \frac{\left( \prod_{j=2}^{n-1} (b_n - b_j) (a_n - a_j) \right)}{\prod_{k=1}^n (b_n + a_k) \cdot \prod_{k=1}^{n-1} (a_n + b_k)}$$

Savez-vous?

$\left( \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} x_{ij} \right) \cdot \boxed{?} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} x_{ij}$   
 Réponse  
 $\left( \prod_{i=2}^{n-1} x_{in} \right)$   
 NB

$\left( \prod_{1 \leq i, j \leq n-1} x_{ij} \right) \cdot \boxed{?} = \prod_{1 \leq i, j \leq n} x_{ij}$   
 Réponse  
 $\left( \prod_{i=1}^n x_{in} \right) \times \left( \prod_{i=1}^{n-1} x_{ni} \right)$   
 NB





$$\Delta_n = \frac{\left( \prod_{j=2}^{n-1} (b_n - b_j)(a_n - a_j) \right)}{\prod_{k=1}^n (a_k + b_n) \cdot \prod_{k=1}^{n-1} (a_n + b_k)}$$

$$\frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (a_i + b_j)}$$

$$\Delta_n = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_i + b_j)}$$

QFD

Fin partie I

**Fin**