

## SÉRIES NUMÉRIQUES ET INTÉGRALES

(Extrait de : Mines-Ponts 2020)

- 1) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . En utilisant la factorisation  $(X+1)^{2n} = (X+1)^n(X+1)^n$ , montrer que

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

- 2) Déterminer un nombre réel  $c > 0$  tel que

$$\binom{2n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} c \frac{4^n}{\sqrt{n}}$$

On rappelle la formule de Stirling :

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

- 3) i) Si  $\alpha$  est un élément de  $]0, 1[$ , montrer, par exemple en utilisant une comparaison série-intégrale, que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

- ii) Si  $\alpha$  est un élément de  $]1, +\infty[$ , montrer de même que

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

- 4) Pour  $x \in [2, +\infty[$ , on pose

$$I(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln(t)}$$

- i) Justifier, pour  $x \in [2, +\infty[$ , la relation

$$I(x) = \frac{x}{\ln(x)} - \frac{2}{\ln(2)} + \int_2^x \frac{dt}{(\ln(t))^2}$$

- ii) Etablir par ailleurs la relation

$$\int_2^x \frac{dt}{(\ln(t))^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} o(I(x))$$

- 
- iii) En déduire finalement un équivalent de  $I(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .
- 5) Pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on admet que

$$\forall x \in ]-1, 1[ , (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

où

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k)}{n!}$$

Justifier la formule :

$$\forall x \in ]-1, 1[ , \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} x^n$$