Structures algébriques usuelles
Résumé

Groupes :

Loi de composition interne (LCI)

Def :
Soit G un ensemble non vide.
On appelle Loi de composition interne sur G, toute application de $G \times G$ vers G

NB : Soit T est une LCI sur G, on a donc :

$$\forall x, y \in G,\ (xTy) \in G$$

Déf : Soit $*$ une LCI sur E.

1/ Commutativité :

$*$ est dite commutative si et ssi $(\forall x, y \in E, x*y = y*x)$

2/ Associativité :

$*$ est dite associative si et ssi $(\forall x, y, z \in E, (x*y)*z = x*(y*z))$

3/ Element neutre :

Soit $e \in E$

e est dite element neutre si et ssi :

$$\forall x \in E, \begin{cases} x*e = x \\ e*x = x \end{cases}$$

4/ Élément inversible :

Soit $a \in E$, Soit e l'élément neutre.
a est dite inversible si et ssi : $\exists b \in E$ $\begin{cases} a*b=e \\ \text{et} \\ b*a=e \end{cases}$

Voc et notation :
Dans ce cas, b s'appelle l'inverse de a et se note a^{-1}.

5/ Distributivité

$*$ et T deux LCI sur E.
On dit que $*$ est distributive par rapport à T.
si et ssi :
$$\forall x,y,z \in E,\ x*(yTz)=(x*y)T(x*z)$$

NB :
1) Supp a est inversible, on a : $\begin{cases} a*a^{-1}=e \\ a^{-1}*a=e \end{cases}$

2) e inversible et $e^{-1}=e$
→ car $e*e=e$.

Prop 3 : Supp que a et b sont inversibles.
$*$ étant associative
Alors $(a*b)$ est aussi inversible et on a
$$(a*b)^{-1}=b^{-1}*a^{-1}$$

Déf 4 : (Partie stable par $*$)

Soit $*$ une LCI sur E.
Soit H une partie de E.
H est dite stable par $*$ si et ssi
$$(\forall x,y \in H,\ x*y \in H)$$

Groupes :

Déf Soit $*$ une LCI sur l'ensemble non vide G.
$(G,*)$ est dit groupe si et ssi :

1/ $*$ est associative
2/ $*$ admet un élément neutre.
3/ Tout élément de G est inversible.

Vocabulaire :
Si $(G,*)$ est un groupe et que $*$ est commutative, on dit que $(G,*)$ est un groupe commutatif ou abelien.

Prop 2 :
X un ensemble non vide (qlq).
$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
$(\mathbb{K}^X, +)$ est un groupe abélien d'élement neutre la fonction nulle.

Prop 3 :
E est un ensemble non vide.
$(S_E, \circ)$ est un groupe d'élément neutre I_E.

Sous-groupes

Def 1 :

Soient $(G,*)$ un groupe d'élément neutre e, et $H \subset G$.
H est dit sous groupe de G si et ssi

1/ $e \in H$

2/ $\forall x, y \in H$, $x*y \in H$

3/ $\forall x \in H$, $x^{-1} \in H$

NB$_1$: Ici $(G,+)$ est un groupe d'élément neutre 0, et $H \subset G$; H est dit un sous-groupe de G si et ssi

1/ $0 \in H$

2/ $\forall x, y \in H$, $x+y \in H$

3/ $\forall x \in H$, $(-x) \in H$

Prop 2 :

$(G,*)$ est un groupe et $H \subset G$, on a :

$$H \text{ sous-groupe de } G \iff \begin{cases} i) & e \in H \\ ii) & \forall x,y \in H, x*y^{-1} \in H \end{cases}$$

NB$_1$: Ici $(G,+)$ groupe d'élément neutre 0 et $H \subset G$, on a :

$$H \text{ est s-groupe de } G \iff \begin{cases} i) & 0 \in H \\ ii) & \forall x,y \in H, x-y \in H \end{cases}$$

NB : $\{e\}$ et G sont deux sous groupes de $(G,*)$.

Prop 3 :

Si H est un s-groupe du groupe $(G,*)$ **alors** $(H,*)$ est aussi un groupe

Remarque pratique :

Pour montrer qu'un ensemble est un groupe, des fois il est plus facile de procéder en montrant que c'est un sous groupe.

Prop 4 (Intersection de s-gr)

Soit $(G,*)$ un groupe.

Toute intersection de sous groupes de G est un sous-groupe de G.

C à d : **Si** $(H_i)_{i\in I}$ est une famille de s-gr de G **alors** $\bigcap_{i\in I} H_i$ est un s-gr de G.

Attention

La réunion de deux s-gr n'est en général pas un s-gr.

Anneaux :

Déf 1

Soit A un ensemble non vide muni de deux LCI "$+$" et "$\times$".

On dit que $(A,+,\times)$ est un anneau si et ssi :

1/ $(A,+)$ est un groupe commutatif (avec la $1^{ère}$ loi).

2/ $\times$ est associative et admet un élément neutre ($2^{ème}$ Loi).

3/ $\times$ est distributive par rapport à $+$

Vocabulaire Si la loi $\times$ est commutative on dit que l'anneau $(A,+,\times)$ est commutatif.

Exemple 2 :
$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. X ensemble non vide qlque.
$(\mathbb{K}^X,+,\times)$ est un anneau commutatif d'éléments neutres respectifs la fonction nulle 0 et la fonction constante 1.

Exemple 3 :
Cas particulier de l'exemple 2 avec $\mathbb{N} = X$.
L'ensemble des suites $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (resp complexes $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$) est un anneau commutatif d'éléments neutres resp la suite nulle et la suite constante 1.

2) Anneau intègre

Déf : Soit $(A,+,\times)$ un anneau.
A est dit anneau intègre si et ssi :

$$\forall a,b \in A,\ ab = 0 \Rightarrow (a=0 \text{ ou } b=0)$$

NB₁ : Dans un anneau intègre on a :

$$ab = 0 \iff (a=0 \text{ ou } b=0)$$

NB₂ : Si A intègre on a :

$$ab \neq 0 \iff (a \neq 0 \text{ et } b \neq 0)$$

Calculs dans un anneau

prop :

Soit $(A,+,\times)$ anneau. On a :

$\forall a \in A,\ 0\times a = 0$ et $a \times 0 = 0$

Réflexes sur les groupes :

1/ $(G,\cdot)$ groupe d'élément neutre e.

$ab = c \Longleftrightarrow b = a^{-1}c$; (non pas : $b = ca^{-1}$)

$ab = ac \Longleftrightarrow b = c$

2/ $(G,+)$ groupe d'élément neutre e

$a+b = c \Longleftrightarrow b = -a+c$

$a+b = c \Longleftrightarrow a = c-b$ (non pas $a = -b+c$)

$a+b = a+c \Longleftrightarrow b = c$

Prop 2 :

$(A,+,\times)$ anneau.

Soient a et $b \in A$ tq $ab = ba$. On a :

1/ $\forall n \in \mathbb{N},\ (ab)^n = a^n b^n$

2/ $\forall n \in \mathbb{N},\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$

Formule de binôme de Newton

3/ $\forall n \in \mathbb{N},\ a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$

Égalité de Bernoulli

4) Éléments inversibles d'un anneau.

Déf 1 :
Soit $(A, +, \times)$ un anneau.
Les éléments inversibles de A sont les inversibles pour la 2ème loi $\times$.

Notation :
$\mathcal{U}(A)$: désignera l'ensemble des éléments inversibles de A.

Prop 2 : Soit $(A, +, \times)$ un anneau.
$(\mathcal{U}(A), \times)$ est un groupe.

5) Corps

Déf 1
Soit $(K, +, \times)$ un anneau commutatif, non réduit à $\{0\}$.
$(K, +, \times)$ est un corps si et seulement si tout élément non nul de K est inversible.

Exemples usuels de corps
$(\mathbb{Q}, +, \times)$; $(\mathbb{R}, +, \times)$, $(\mathbb{C}, +, \times)$ sont des corps.
$(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau intègre mais n'est pas un corps.

NB 1
1) Si $(K, +, \times)$ est un corps, alors $\mathcal{U}(K) = K^*$.
2) Un corps est par définition commutatif.

NB2 :

1) Tout Corps est un anneau intègre.

2) La réciproque est en général fausse.

Fin