STRUCTURES ALGÉBRIQUES
ANNEAUX...

Exercice 1 :

Soit $(A, +, \times)$ un anneau.
On rappelle qu'un élément a de A est dit nilpotent si et seulement s'il existe un entier non nul n tel que $a^p = 0$.

1) Soient a et b deux éléments nilpotents de A et qui commuttent.
Montrer que $(a + b)$ et ab sont aussi nilpotents.
2) Soient maintenant a et b deux éléments de A tels que ab soit nilpotent.
Montrer que ba est aussi nilpotent.
3) Soit a un élément nilpotent de A.
Montrer que $(1 - a)$ est inversible et préciser son inverse en fonction des puissances de a.

NB : Questions classiques rencontrées avec les anneaux particuliers $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) +, \times)$ et $(\mathcal{L}(E) +, \circ)$.

Exercice 2 :

1) Quels sont les sous-corps de $\mathbb{Q}$?
2) Quels sont les idéaux d'un corps K ?

Exercice 3 :

Soit f un endomorphisme de l'anneau $(\mathbb{R}, +, \times)$.

1) i) Justifier que
$$\forall x \geq 0, \ f(x) \geq 0$$
ii) En déduire que f est croissante sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que :
i) $\forall r \in \mathbb{Q}, \ f(r) = r$
ii) $f = id_{\mathbb{R}}$
Indice : vous pouvez utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 4 :

Un complexe est dit *entier de Gauss* quand sa partie réelle et sa partie imaginaire sont des entiers relatifs.
Considérons l'anneau des entiers de Gauss

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

Pour $z \in \mathbb{Z}[i]$, on note $\mathcal{N}(z) = |z|^2$. Remarquons que $\mathcal{N}(zz') = \mathcal{N}(z)\mathcal{N}(z')$.
Déterminer le groupe des inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.

Exercice 5 :

Définitions : $(A, +, \times)$ *étant un anneau.*
Un idéal I de A est dit principal s'il existe $a \in A$ tel que $I = aA$.
L'anneau $(A, +, \times)$ est dit principal quand tous ses idéaux sont principaux.
On se propose de montrer que l'anneau produit $(\mathbb{Z}^2, +, \times)$ est principal.

1) Soit I un idéal de $\mathbb{Z}^2$.
Notons $I_1 = \{a \in \mathbb{Z} \mid (a, 0) \in I\}$ et $I_2 = \{a \in \mathbb{Z} \mid (0, a) \in I\}$.
Montrer que
   i) I_1 et I_2 sont des idéaux de l'anneau $(\mathbb{Z}, +, \times)$.
   ii) $I = I_1 \times I_2$.
2) Conclure.

Exercice 6 :

L'objectif de l'exercice est de montrer la relation suivante

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{d|n} \varphi(d) = n$$

où φ désigne l'indicatrice d'Euler.

1) Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.
Montrer que H est de la forme $H =< \overline{a} >$, où a divise n.
2) Soit d un entier divisant n. Notons $a = n/d$. Montrer que :
   i) $< \overline{a} >$ est l'unique sous-groupe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ d'ordre d.
   ii) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ possède $\varphi(d)$ éléments d'ordre d.
3) Conclure.

Exercice 7 :

Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif.
Définition : *Soit I un idéal de A. On appelle radical de I la partie $\sqrt{I}$ de A définie par*

$$\sqrt{I} = \{a \in A, \ \exists n \in \mathbb{N}^*, \ a^n \in I\}$$

1) Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A contenant I.
2) Soient I et J deux idéaux de A et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\textbf{a) } \sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}, \ \textbf{b) } \sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}, \ \textbf{c) } \sqrt{I^n} = \sqrt{I}$$

3) Ici $A = \mathbb{Z}$. Déterminer le radical de l'idéal $n\mathbb{Z}$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 8 :

Considérons la matrice carrée d'ordre n, $T = (T_{ij})$ définie par

$$T_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ i|j \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Notons $D = diag(\varphi(1), \dots, \varphi(n))$, où φ l'indicatrice d'Euler.
Admettons l'égalité

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{d|n} \varphi(d) = n$$

1) Calculer le (i, j)ème coéfficient de la matrice ${}^tTDT$ en fonction de $i \wedge j$.

2) En déduire $det(S)$; où $S = (i \wedge j)_{1 \leq i,j \leq n}$. *Dite la matrice de Smith.*

Exercice 9 :

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} x \equiv 2\ [6] \\ x \equiv 3\ [11] \end{cases}$

2) $\begin{cases} x \equiv 2\ [6] \\ x \equiv 3\ [11] \\ x \equiv 4\ [7] \end{cases}$

3) $\begin{cases} 8x \equiv 4\ [10] \\ 9x \equiv 3\ [21] \end{cases}$