

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,  
SUPAÉRO (ISAE), ENSTA PARISTECH,  
TÉLÉCOM PARISTECH, MINES PARISTECH,  
MINES DE SAINT-ÉTIENNE, MINES DE NANCY,  
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (FILIÈRE MP),  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI).

CONCOURS 2015

## SECONDE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

**Filière MP**

*MATHÉMATIQUES II - MP.*

# Extrait

## B. Variables aléatoires sous-gaussiennes

Dans toute la suite du problème, toutes les variables aléatoires considérées sont réelles et discrètes, définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Soit  $\alpha > 0$ . On dit que la variable aléatoire  $X$  est  $\alpha$ -sous-gaussienne si :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{E}(\exp(tX)) \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right).$$

On rappelle la notation :  $\text{ch}(t) = \frac{\exp(t) + \exp(-t)}{2}$ .

- 8) Montrer que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a  $\text{ch}(t) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$ . On pourra au préalable établir le développement de la fonction ch en série entière sur  $\mathbb{R}$ .
- 9) Soit  $t \in \mathbb{R}$ . Démontrer que si  $x \in [-1, 1]$ , on a l'inégalité de convexité :

$$\exp(tx) \leq \frac{1+x}{2} \exp(t) + \frac{1-x}{2} \exp(-t).$$

- 10) Soit  $X$  une variable aléatoire réelle bornée par 1 et centrée. Montrer que  $X$  est 1-sous-gaussienne. En déduire que, si  $X$  est une variable aléatoire bornée par  $\alpha > 0$  et centrée, alors elle est  $\alpha$ -sous-gaussienne.
- 11) Soit  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires mutuellement indépendantes et  $\alpha$ -sous-gaussiennes, et  $\mu_1, \dots, \mu_n$  des nombres réels tels que  $\sum_{i=1}^n (\mu_i)^2 = 1$ .

Montrer que la variable aléatoire  $\sum_{i=1}^n \mu_i X_i$  est  $\alpha$ -sous-gaussienne.

- 12)** Soit  $X$  une variable aléatoire  $\alpha$ -sous-gaussienne et  $\lambda > 0$ . Montrer que pour tout  $t > 0$  :

$$P(X \geq \lambda) \leq \exp\left(-\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda\right)$$

En déduire que :

$$P(|X| \geq \lambda) \leq 2 \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\alpha^2}\right).$$

Dans la suite du problème, on admet qu'une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  est d'espérance finie si et seulement si la série  $\sum P(X \geq k)$  converge et que, dans ce cas :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k).$$

- 13)** Si  $X$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ , montrer que  $X$  est d'espérance finie si et seulement si la série de terme général  $P(X \geq k)$  converge et que, dans ce cas :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k) \leq \mathbb{E}(X) \leq 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k).$$

On pourra pour cela considérer la partie entière  $[X]$ .

Pour tout  $s \in ]1, +\infty[$ , on note  $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^{-s}$ .

- 14)** Soit  $X$  une variable aléatoire  $\alpha$ -sous-gaussienne et  $\beta > 0$ . Montrer que pour tout entier  $k > 0$  :

$$P\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geq k\right) \leq 2k^{-\eta}$$

où on a posé  $\eta = \alpha^{-2}\beta^{-2}$ . En déduire que si  $\alpha\beta < 1$ , la variable aléatoire  $\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right)$  est d'espérance finie majorée par  $1 + 2\zeta(\eta)$ .

**Fin extrait**