

Concours National Commun
CORRIGÉ DE
L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES 2
Session 2025 - Filière MP

m.laamoum2@gmail.com¹

EXERCICE

1. On pose $f_1 = (1, 1, 1)$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$.

a) Soit $f = (x, y, z) \in F$, donc $z = x + y$, ce qui donne

$$f = (x, y, x + y) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1)$$

Soit $f_2 = (1, 0, 1)$ et $f_3 = (0, 1, 1)$. La famille (f_2, f_3) est génératrice de F , ainsi, $F = \text{Vect}(f_2, f_3)$.

b) Nous avons $f_1 = (1, 1, 1)$, $f_2 = (1, 0, 1)$ et $f_3 = (0, 1, 1)$.

Le déterminant de la famille (f_1, f_2, f_3) dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est égal à

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1) - (1 - 1) = -1$$

Donc la famille (f_1, f_2, f_3) est libre, de cardinal 3, donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

2.a) On vérifie que :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

et

$$A^2 - 3A + 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \\ -3 & -3 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi $A^2 - 3A + 2I_3 = O_3$.

b) On a $A^2 - 3A + 2I_3 = O_3$, on peut écrire $3A - A^2 = 2I_3$, donc $A(\frac{1}{2}(3I_3 - A)) = I_3$.

Ainsi A est inversible et son inverse est

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(3I_3 - A) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Tous mes corrigés sont disponibles ici <https://tinyurl.com/4up84xze>

3.a) On prend ici $f_1 = (1, 1, 1)^\top$, $f_2 = (1, 0, 1)^\top$ et $f_3 = (0, 1, 1)^\top$. On vérifie facilement que $Af_1 = f_1$, $Af_2 = 2f_2$ et $Af_3 = 2f_3$. Donc $\alpha = 1$, $\beta = 2$.

b) D'après les questions Q1.b et Q3.a, (f_1, f_2, f_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, formée de vecteurs propres de A .

Donc la matrice A est diagonalisable, et on a $A = PDP^{-1}$ avec : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (La matrice de passage de la

base canonique vers la base (f_1, f_2, f_3)), et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On a aussi $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Se fait simplement par récurrence sur n .

Pour $n = 0$, $A^0 = PD^0P^{-1} = I_3$.

Supposons le pour un entier $n \geq 0$, donc

$$A^{n+1} = A^n A = (PD^n P^{-1})(PDP^{-1}) = PD^n (P^{-1}P) DP^{-1} = PD^n I_3 DP^{-1} = PD^{n+1} P^{-1}$$

donc c'est vraie pour $n + 1$.

Conclusion : $A^n = PD^n P^{-1}$ pour tout entier naturel n .

Dans notre cas

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1-2^n & 2^n-1 \\ 1-2^n & 1 & 2^n-1 \\ 1-2^n & 1-2^n & 2^{n+1}-1 \end{pmatrix}$$

PROBLÈME

PARTIE 1

Preliminaires

1. Soient $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, $N = (n_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
 $M + \lambda N$ est la matrice de terme général $(m_{i,j} + \lambda n_{i,j})$. On a

$$\text{Tr}(M + \lambda N) = \sum_{i=1}^n (m_{i,i} + \lambda n_{i,i}) = \sum_{i=1}^n m_{i,i} + \lambda \sum_{i=1}^n n_{i,i}$$

Donc, $\boxed{\text{Tr}(M + \lambda N) = \text{Tr}(M) + \lambda \text{Tr}(N)}$. L'application Tr est linéaire.

2. Soient $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $N = (n_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
a) Soit $P = MN = (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. On a

$$p_{i,j} = \sum_{k=1}^n m_{i,k} n_{k,j}.$$

Donc,

$$\text{Tr}(MN) = \sum_{l=1}^n p_{l,l} = \sum_{l=1}^n \left(\sum_{k=1}^n m_{l,k} n_{k,l} \right) = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n m_{l,k} n_{k,l}$$

- b) Soit $Q = NM = (q_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, on a

$$q_{i,j} = \sum_{l=1}^n n_{i,l} m_{l,j}.$$

D'après Q2.a), $\text{Tr}(MN) = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n m_{l,k} n_{k,l}$.

On permute les deux sommes

$$\text{Tr}(MN) = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n m_{l,k} n_{k,l} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n m_{l,k} n_{k,l} = \sum_{k=1}^n q_{k,k} = \text{Tr}(NM)$$

Ainsi, $\boxed{\text{Tr}(MN) = \text{Tr}(NM)}$.

- c) Si M et N sont semblables, il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $N = PMP^{-1}$. Alors

$$\text{Tr}(N) = \text{Tr}(P(MP^{-1})) = \text{Tr}((MP^{-1})P) = \text{Tr}(M(P^{-1}P)) = \text{Tr}(M)$$

Donc, les matrices semblables ont la même trace.

3. On considère l'ensemble $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M \text{ est diagonale et } \text{Tr}(M) = 0\}$.

- a) Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- La matrice nulle O_n est diagonale et $\text{Tr}(O_n) = 0$, donc $O_n \in F$. F n'est pas vide.
- Soient $M_1, M_2 \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. M_1 et M_2 sont diagonales, donc $M_1 + \lambda M_2$ est une matrice diagonale. $\text{Tr}(M_1) = 0$ et $\text{Tr}(M_2) = 0$. Par linéarité de la trace, $\text{Tr}(M_1 + \lambda M_2) = \text{Tr}(M_1) + \lambda \text{Tr}(M_2) = 0$. Donc $M_1 + \lambda M_2 \in F$.

Ainsi F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Autre méthode : On a $F = \mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \cap \text{Ker}(\text{Tr})$, avec $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices diagonales.

Donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

b) On a

$$\begin{aligned} M &\in F \Leftrightarrow M = \text{Diag}(a_1, \dots, a_n) \text{ et } a_1 + \dots + a_n = 0 \\ &\Leftrightarrow M = \text{Diag}(a_1, \dots, -(a_1 + \dots + a_{n-1})) \\ &\Leftrightarrow M = \sum_{i=1}^{n-1} a_i (E_{i,i} - E_{n,n}) \end{aligned}$$

La famille $(E_{i,i} - E_{n,n})_{1 \leq i \leq n-1}$ est génératrice de F et $\boxed{\dim(F) = n-1}$.

Autre méthode : L'application $\text{Tr}|_{\mathcal{D}_n(\mathbb{R})} : \mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire non nulle. Son image est donc $\mathbb{R}$, de dimension 1. $F = \text{Ker}(\text{Tr}|_{\mathcal{D}_n(\mathbb{R})})$. D'après le théorème du rang, $\dim(F) = \dim(\mathcal{D}_n(\mathbb{R})) - \dim(\text{Im}(\text{Tr}|_{\mathcal{D}_n(\mathbb{R})})) = n-1$.

c) Soit P une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $G = PFP^{-1} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M = PDP^{-1} \text{ et } D \in F\}$.

Considérons l'application $\varphi_P : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\varphi_P(X) = PXP^{-1}$.

φ_P est un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($(\varphi_P)^{-1} = \varphi_{P^{-1}}$), donc elle conserve la dimension des sous-espaces.

Comme $G = \varphi_P(F)$, alors $\dim(G) = \dim(F) = n-1$.

Ainsi $\boxed{\dim(G) = n-1}$.

4. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'application,

$$\Phi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad ; \quad X \mapsto X + \text{Tr}(X).A$$

a) Soient $X_1, X_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \Phi_A(X_1 + \lambda X_2) &= (X_1 + \lambda X_2) + \text{Tr}(X_1 + \lambda X_2)A \\ &= X_1 + \lambda X_2 + (\text{Tr}(X_1) + \lambda \text{Tr}(X_2))A \\ &= (X_1 + \text{Tr}(X_1)A) + \lambda(X_2 + \text{Tr}(X_2)A) \\ &= \Phi_A(X_1) + \lambda \Phi_A(X_2). \end{aligned}$$

Donc Φ_A est linéaire.

Soit B une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'équation matricielle :

$$(*) \quad \Phi_A(X) = B$$

b) On suppose dans cette question que $\text{Tr}(A) \neq -1$.

i) Si M est solution de $(*)$ alors, $M + \text{Tr}(M)A = B$. Appliquons la trace aux deux membres :

$$\text{Tr}(M + \text{Tr}(M)A) = \text{Tr}(M) + \text{Tr}(\text{Tr}(M)A) = \text{Tr}(M)(1 + \text{Tr}(A)) = \text{Tr}(B)$$

Puisque $\text{Tr}(A) \neq -1$, $1 + \text{Tr}(A) \neq 0$ alors $\boxed{\text{Tr}(M) = \frac{\text{Tr}(B)}{1 + \text{Tr}(A)}}$.

ii) Si M est solution de $(*)$ alors, $M = B - \text{Tr}(M)A$.

En substituant la valeur de $\text{Tr}(M)$ trouvée précédemment : $M = B - \frac{\text{Tr}(B)}{1 + \text{Tr}(A)}A$.

Réciproquement, vérifions si cette expression de M est bien solution.

Soit $M_0 = B - \frac{\text{Tr}(B)}{1 + \text{Tr}(A)}A$. On a

$$\text{Tr}(M_0) = \text{Tr}\left(B - \frac{\text{Tr}(B)}{1 + \text{Tr}(A)}A\right) = \text{Tr}(B) - \frac{\text{Tr}(B)}{1 + \text{Tr}(A)}\text{Tr}(A) = \frac{\text{Tr}(B)}{1 + \text{Tr}(A)}$$

Donc

$$\Phi_A(M_0) = M_0 + \text{Tr}(M_0)A = \left(B - \frac{\text{Tr}(B)}{1 + \text{Tr}(A)}A\right) + \frac{\text{Tr}(B)}{1 + \text{Tr}(A)}A = B.$$

Ainsi $\boxed{M = B - \frac{\text{Tr}(B)}{1 + \text{Tr}(A)}A}$ est l'unique solution de l'équation (*).

iii) Φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'équation $\Phi_A(X) = B$ admet une solution unique. Ceci signifie que Φ_A est bijective. Donc Φ_A est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

c) On suppose maintenant que $\text{Tr}(A) = -1$.

i) Dans l'équation $X + \text{Tr}(X)A = B$, on compose avec la trace :

$$\text{Tr}(B) = \text{Tr}(X) + \text{Tr}(X)\text{Tr}(A) = \text{Tr}(X) - \text{Tr}(X) = 0$$

Cas 1 : Si $\text{Tr}(B) \neq 0$. L'équation (*) n'a aucune solution.

Cas 2 : Si $\text{Tr}(B) = 0$. La condition nécessaire est satisfaite.

On remarque que B est solution particulière de (*).

Soit X une autre solution de (*), posons $Y = X - B$ sont solutions de (*), alors

$$B = X + \text{Tr}(X)A = Y + B + \text{Tr}(Y + B)A = Y + B + \text{Tr}(Y)A$$

par suite

$$Y + \text{Tr}(Y)A = 0$$

Autrement dit Y est colinéaire avec A et $X = B - \text{Tr}(Y)A$.

Réciproquement, soit $t \in \mathbb{R}$. Posons $X = B - tA$.

Alors $\text{Tr}(X) = \text{Tr}(B) - t\text{Tr}(A) = t$ et $X + \text{Tr}(X)A = X + tA = B$. Par suite X est une solution de (*).

Ainsi, si $\text{Tr}(B) = 0$, l'ensemble des solutions de (*) est $\boxed{\{B - tA \mid t \in \mathbb{R}\}}$.

ii) Montrons que Φ_A est une projection.

- Vérifions que $\Phi_A \circ \Phi_A = \Phi_A$.

On a

$$\Phi_A(\Phi_A(X)) = \Phi_A(X + \text{Tr}(X)A) = (X + \text{Tr}(X)A) + \text{Tr}(X + \text{Tr}(X)A)A$$

et

$$\text{Tr}(X + \text{Tr}(X)A) = \text{Tr}(X) + \text{Tr}(X)\text{Tr}(A) = \text{Tr}(X) - \text{Tr}(X) = 0$$

donc

$$\Phi_A(\Phi_A(X)) = \Phi_A(X).$$

Φ_A est bien un projecteur.

- Φ_A est une projection sur $F_1 = \text{Im}(\Phi_A)$ parallèlement à $F_2 = \text{Ker}(\Phi_A)$.

Soit $Y \in \text{Im}(\Phi_A)$. Alors $Y = \Phi_A(X)$ pour un certain X . On a

$$\text{Tr}(Y) = \text{Tr}(\Phi_A(X)) = \text{Tr}(X + \text{Tr}(X)A) = \text{Tr}(X) + \text{Tr}(X)\text{Tr}(A) = 0.$$

Donc $\text{Im}(\Phi_A) \subseteq \text{Ker}(\text{Tr})$.

Réciproquement, si $Y \in \text{Ker}(\text{Tr})$, alors $\Phi_A(Y) = Y + \text{Tr}(Y)A = Y$. Donc $Y \in \text{Im}(\Phi_A)$.

Ainsi, $\boxed{F_1 = \text{Im}(\Phi_A) = \text{Ker}(\text{Tr}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{Tr}(M) = 0\}}$.

On a $F_2 = \text{Ker}(\Phi_A)$, c'est l'ensemble des solutions de (*) avec $B = O_n$.

D'après i) on a $\text{Ker}(\Phi_A) = \{-tA \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Ainsi $\boxed{F_2 = \text{Ker}(\Phi_A) = \text{Vect}(A)}$.

PARTIE 2

La valeur absolue de la trace comme étant une "fonction génératrice"

1. Soit q une semi-norme sur $\mathcal{E}$.

a) On a

$$q(O_n) = q(0.O_n) = |0|q(O_n) = 0,$$

et

$$q(-M) = q((-1)M) = |-1|q(M) = q(M).$$

b) Soit (M, N) de $\mathcal{E}^2$, on a par l'inégalité triangulaire :

$$q(M) = q(M + N - N) \leq q(M + N) + q(-N).$$

Comme $q(-N) = q(N)$, on a $q(M) \leq q(M + N) + q(N)$, d'où

$$q(M) - q(N) \leq q(M + N). (1)$$

De même on a

$$q(N) - q(M) \leq q(M + N). (2)$$

Les inégalités (1) et (2) impliquent $\boxed{|q(M) - q(N)| \leq q(M + N)}$.

c) Soit (M, N) de $\mathcal{E}^2$, supposons que $q(N) = 0$.

L'inégalité triangulaire donne :

$$q(M + N) \leq q(M) + q(N) = q(M).$$

D'après b)

$$q(M) = q(M) - q(N) \leq q(M + N).$$

Ces deux inégalités entraînent $\boxed{q(M + N) = q(M)}$.

2. On considère l'application f définie de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}^+$ par $f(M) = |\text{Tr}(M)|$. Montrons que f est une semi-norme sur $\mathcal{E}$ qui vérifie la propriété $(\mathcal{P})$.

• On a

$$f(\lambda M) = |\text{Tr}(\lambda M)| = |\lambda \text{Tr}(M)| = |\lambda| |\text{Tr}(M)| = |\lambda| f(M).$$

$$f(M + N) = |\text{Tr}(M + N)| = |\text{Tr}(M) + \text{Tr}(N)|. \text{ Par l'inégalité triangulaire : } |\text{Tr}(M) + \text{Tr}(N)| \leq |\text{Tr}(M)| + |\text{Tr}(N)|.$$

$$\text{Donc } f(M + N) \leq f(M) + f(N).$$

f est donc une semi-norme.

Soit (M, N) de $\mathcal{E}^2$, on a

$$f(MN) = |\text{Tr}(MN)| = |\text{Tr}(NM)| = f(NM)$$

Donc f vérifie $(\mathcal{P})$.

On suppose que $n \geq 2$.

3. Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ et soient A et B deux matrices de $\mathcal{E}$ telles que,

$$A = \sum_{j=1}^n E_{1,j} + \sum_{i=2}^n E_{i,i} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$B = \sum_{h=1}^n \alpha_h E_{h,1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

a) On a

$$\begin{aligned} AB &= \left(\sum_{j=1}^n E_{1,j} + \sum_{i=2}^n E_{i,i} \right) \left(\sum_{h=1}^n \alpha_h E_{h,1} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^n \alpha_h E_{1,j} E_{h,1} + \sum_{i=2}^n \sum_{h=1}^n \alpha_h E_{i,i} E_{h,1} \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^n \alpha_h \delta_{j,h} E_{1,1} + \sum_{i=2}^n \sum_{h=1}^n \alpha_h \delta_{i,h} E_{i,1} \\ &= \sum_{j=1}^n \alpha_j E_{1,1} + \sum_{i=2}^n \alpha_i E_{i,1} \end{aligned}$$

Donc $AB = \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \right) E_{1,1} + \sum_{i=2}^n \alpha_i E_{i,1}.$

b) On a

$$\begin{aligned} BA &= \left(\sum_{h=1}^n \alpha_h E_{h,1} \right) \left(\sum_{j=1}^n E_{1,j} + \sum_{i=2}^n E_{i,i} \right) \\ &= \sum_{h=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_h E_{h,1} E_{1,j} + \sum_{h=1}^n \sum_{i=2}^n \alpha_h E_{h,1} E_{i,i} \\ &= \sum_{h=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_h \delta_{1,1} E_{h,j} + \sum_{h=1}^n \sum_{i=2}^n \alpha_h \delta_{1,i} E_{h,i} \end{aligned}$$

la deuxième somme est nulle car $\delta_{1,i} = 0$ pour tout $i \geq 2$, donc $BA = \sum_{h=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_h E_{h,j}.$

Ainsi $BA = \sum_{h=1}^n \alpha_h \left(\sum_{j=1}^n E_{h,j} \right).$

4. Soit q une semi-norme sur $\mathcal{E}$ qui vérifie la propriété $(\mathcal{P})$.

Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ un élément de $\mathcal{E}$.

a) Soit deux entiers distincts i et j tels que $1 \leq i, j \leq n$.

On a $E_{i,j} = E_{i,i} E_{i,j}$. Par la propriété $(\mathcal{P})$,

$$q(E_{i,i} E_{i,j}) = q(E_{i,j} E_{i,i}) = q(\delta_{j,i} E_{i,i}) = \delta_{j,i} q(E_{i,i}).$$

Comme $i \neq j$, alors $\delta_{ji} = 0$, donc $q(E_{i,i}E_{i,j}) = 0$.

Ainsi, $\boxed{q(E_{i,j}) = 0 \text{ pour } i \neq j}$.

b) Par l'inégalité triangulaire :

$$q\left(\sum_{i=2}^n m_{i,1}E_{i,1}\right) \leq \sum_{i=2}^n q(m_{i,1}E_{i,1}) = \sum_{i=2}^n |m_{i,1}|q(E_{i,1}).$$

Pour $i \in \{2, \dots, n\}$, $i \neq 1$, donc $q(E_{i,1}) = 0$.

Alors

$$q\left(\sum_{i=2}^n m_{i,1}E_{i,1}\right) \leq 0$$

Comme q est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, on conclut que $\boxed{q\left(\sum_{i=2}^n m_{i,1}E_{i,1}\right) = 0}$.

c) On écrit

$$M = \sum_{1 \leq i,j \leq n} m_{i,j}E_{i,j} = \sum_{i=1}^n m_{i,i}E_{i,i} + \sum_{i \neq j} m_{i,j}E_{i,j}.$$

Posons $D_M = \sum_{i=1}^n m_{i,i}E_{i,i}$ et $N = \sum_{i \neq j} m_{i,j}E_{i,j}$.

On a

$$q(N) = q\left(\sum_{i \neq j} m_{i,j}E_{i,j}\right) \leq \sum_{i \neq j} |m_{i,j}|q(E_{i,j}).$$

D'après Q4.a), $q(E_{i,j}) = 0$ pour $i \neq j$, donc $q(N) \leq 0$, ce qui implique $q(N) = 0$.

D'après Q1.c), si $q(N) = 0$, alors $q(M) = q(D_M + N) = q(D)$. Donc $\boxed{q(M) = q(D_M) = q\left(\sum_{i=1}^n m_{i,i}E_{i,i}\right)}$.

d) D'après Q4.c), $q(M) = q(D_M)$ où $D_M = \sum_{i=1}^n m_{i,i}E_{i,i}$.

De même, $q(BA) = q(D_{BA})$ où D_{BA} est la partie diagonale de BA . D'après Q3.b),

$$BA = \sum_{h=1}^n \alpha_h \left(\sum_{j=1}^n E_{h,j} \right) = \sum_{h=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_h E_{h,j}.$$

La partie diagonale de BA est

$$D_{BA} = \sum_{h=1}^n \alpha_h E_{h,h}.$$

Choisissons $\alpha_k = m_{k,k}$ pour $k = 1, \dots, n$. Ce qui donne

$$D_{BA} = \sum_{h=1}^n m_{h,h}E_{h,h} = D_M.$$

Alors $q(D_{BA}) = q(D_M)$. Donc

$$q(BA) = q(D_{BA}) = q(D_M) = q(M)$$

Ainsi $\boxed{q(M) = q(BA) \text{ avec } \alpha_k = m_{k,k} \text{ pour } k = 1, \dots, n}$.

e) Utilisons les matrices A et B de la question Q3, avec le choix $\alpha_k = m_{k,k}$.

D'après Q3.a),

$$AB = \left(\sum_{j=1}^n m_{j,j} \right) E_{1,1} + \sum_{i=2}^n m_{i,i}E_{i,1} = \text{Tr}(M)E_{1,1} + \sum_{i=2}^n m_{i,i}E_{i,1}.$$

D'après Q4.b) $q\left(\sum_{i=2}^n m_{i,i} E_{i,1}\right) = 0$. D'après Q1.c), on a

$$q(AB) = q(\text{Tr}(M)E_{1,1} + \sum_{i=2}^n m_{i,i} E_{i,1}) = q(\text{Tr}(M)E_{1,1}) = |\text{Tr}(M)|q(E_{1,1})$$

Donc $\boxed{q = \alpha f \text{ avec } \alpha = q(E_{1,1}) \geq 0}$.

5. Si $n = 1$, $\mathcal{E} = \mathcal{M}_1(\mathbb{K})$. Une matrice $M \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ est de la forme $M = (m_{1,1}) = m_{1,1}E_{1,1}$ avec $\text{Tr}(M) = m_{1,1}$.
Donc $f(M) = |\text{Tr}(M)| = |m_{1,1}|$.
Soit q une semi-norme sur $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$, alors $q(M) = q(m_{1,1}E_{1,1}) = |m_{1,1}|q(E_{1,1})$. Soit
On a $q(M) = \alpha f(M)$, avec $\alpha = q(E_{1,1})$. Le résultat $q = \alpha f$ reste donc valable pour $n = 1$.

PARTIE 3

Caractérisation d'une matrice de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ par la notion de trace

$\mathcal{O}(n)$ désigne le groupe des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M^\top M = I_n$.

1. On considère une matrice S de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

a) Soit la matrice $D = \text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ telle que pour tout entier k , $1 \leq k \leq n$, λ_k sont des réels positifs. Soit $U = (u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{O}(n)$.

i) On a $U \in \mathcal{O}(n)$, donc les colonnes, $C_1, \dots, C_n$, de U , forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire usuel.

Pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on a $C_j = (u_{1,j}, \dots, u_{n,j})^\top$. On a donc pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$|u_{i,j}| \leq \|C_j\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_{i,j}^2} = 1$$

Donc $\boxed{|u_{i,j}| \leq 1, \text{ pour tout } i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket}$.

ii) On a $U = (u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $D = (\lambda_i \delta_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

Posons $DU = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Alors pour $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n \lambda_i \delta_{i,k} u_{k,j} = \lambda_i u_{i,j}.$$

Donc $\boxed{DU = (\lambda_i u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}}$.

iii) On a

$$\text{Tr}(DU) = \sum_{k=1}^n c_{k,k} = \sum_{k=1}^n \lambda_k u_{k,k}.$$

Puisque $\lambda_k \geq 0$ et $u_{k,k} \leq |u_{k,k}| \leq 1$, alors

$$\text{Tr}(DU) = \sum_{k=1}^n \lambda_k u_{k,k} \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k = \text{Tr}(D).$$

Donc $\boxed{\text{Tr}(DU) \leq \text{Tr}(D)}$.

b) Soit U une matrice de $\mathcal{O}(n)$.

- i) $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, S est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres. Il existe donc une matrice orthogonale $P \in \mathcal{O}(n)$ ($P^{-1} = P^\top$) et une matrice diagonale $D = \text{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ (dont les coefficients diagonaux α_i sont les valeurs propres de S) telles que $S = PDP^{-1} = PDP^\top$. De plus, $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, ce qui est équivalent à $\text{Sp}(S) \subset \mathbb{R}^+$, donc les valeurs propres α_i sont positives. (Si V_i est un vecteur propre associé à α_i , alors $V_i^\top S V_i = V_i^\top (\alpha_i V_i) = \alpha_i V_i^\top V_i = \alpha_i \|V_i\|^2 \geq 0$)

- ii) Posons $V = P^\top U P$, on a $S = PDP^\top$. Donc

$$SU = (PDP^\top)U = PD(P^\top U P)P^\top = PDV P^\top.$$

Ainsi, $\boxed{SU = P(DV)P^\top}$.

- iii) On a $SU = P(DV)P^\top$. Donc SU est semblable à DV et

$$\text{Tr}(SU) = \text{Tr}(DV)$$

Comme $\mathcal{O}(n)$ est un groupe et $P, U \in \mathcal{O}(n)$, alors

$$V = P^\top U P = P^{-1} U P \in \mathcal{O}(n)$$

de plus $D = \text{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ avec $\alpha_i \geq 0$.

D'après la question Q1.a)iii), $\text{Tr}(DV) \leq \text{Tr}(D)$.

Donc

$$\text{Tr}(SU) = \text{Tr}(DV) \leq \text{Tr}(D) = \text{Tr}(S)$$

Ainsi $\boxed{\text{Tr}(SU) \leq \text{Tr}(S)}$.

2. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que,

$$\forall U \in \mathcal{O}(n) \quad \text{Tr}(AU) \leq \text{Tr}(A)$$

- a) i) Soit a, b, α , des réels

- Si $(a, b) = (0, 0)$, le résultat est trivial.
- Si $(a, b) \neq (0, 0)$, alors $\sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$. On peut écrire :

$$a \cos(\alpha) + b \sin(\alpha) = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos(\alpha) + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin(\alpha) \right).$$

Soit $x_0 = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $y_0 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. On a $x_0^2 + y_0^2 = 1$.

Donc il existe un angle φ tel que $x_0 = \cos \varphi$ et $y_0 = \sin \varphi$.

L'expression devient $\sqrt{a^2 + b^2}(\sin \varphi \cos(\alpha) + \cos \varphi \sin(\alpha)) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \varphi)$.

Ainsi, il existe φ tel que $\boxed{a \cos(\alpha) + b \sin(\alpha) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \varphi)}$.

- ii) Si pour tout réel α , $a \cos(\alpha) + b \sin(\alpha) \leq a$.

Alors $\sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \varphi) \leq a$ pour tout α . En particulier, pour $\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi$, on obtient $\sqrt{a^2 + b^2} \leq a$. Ceci implique que $a^2 + b^2 \leq a^2$ et $b^2 \leq 0$. Donc $b = 0$.

- b) Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ pour son produit scalaire usuel. On note, pour tous entiers p et q tels que $1 \leq p < q \leq n$, $\Pi_{p,q} = \text{Vect}(e_p, e_q)$.

On considère $u_{p,q}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que : $(u_{p,q})|_{\Pi_{p,q}} = r_\alpha$ et $(u_{p,q})|_{(\Pi_{p,q})^\perp} = \text{id}_{(\Pi_{p,q})^\perp}$.

i) On a la décomposition

$$\Pi_{1,2} \oplus (\Pi_{1,2})^\perp = \mathbb{R}^n$$

$\mathcal{B}_{1,2} = (e_1, e_2)$ est une b.o.n de $\Pi_{1,2}$ et $\mathcal{C}_{1,2} = (e_3, e_4, \dots, e_n)$ est une b.o.n de $(\Pi_{1,2})^\perp$.

Par définition de $u_{1,2}$ on a :

$$Mat_{\mathcal{B}_{1,2}} \left((u_{1,2})|_{\Pi_{1,2}} \right) = Mat_{\mathcal{B}_{1,2}} (r_\alpha) = R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

et

$$Mat_{\mathcal{C}_{1,2}} \left((u_{1,2})|_{(\Pi_{1,2})^\perp} \right) = I_{n-2}$$

Comme $\Pi_{1,2}$ et $(\Pi_{p,q})^\perp$ sont stable par $u_{1,2}$, alors

$$U_{1,2} = Mat_{\mathcal{B}} (u_{1,2}) = \text{Diag} \left[Mat_{\mathcal{B}_{1,2}} \left((u_{1,2})|_{\Pi_{1,2}} \right), Mat_{\mathcal{C}_{1,2}} \left((u_{1,2})|_{(\Pi_{1,2})^\perp} \right) \right] = \text{Diag} (R_\alpha, I_{n-2})$$

Ainsi

$$U_{1,2} = \left(\begin{array}{c|c} R_\alpha & 0 \\ \hline 0 & I_{n-2} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|ccc} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 & \dots & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right).$$

On a le produit par blocs

$$U_{1,2}^T U_{1,2} = \left(\begin{array}{c|c} R_\alpha & 0 \\ \hline 0 & I_{n-2} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} R_\alpha & 0 \\ \hline 0 & I_{n-2} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} R_\alpha R_\alpha^T & 0 \\ \hline 0 & (I_{n-2})^2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} I_2 & 0 \\ \hline 0 & I_{n-2} \end{array} \right) = I_n$$

Donc $U_{1,2}$ est une matrice orthogonale.

ii) On a $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, posons $U_{1,2} = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $AU_{1,2} = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

De la forme de $U_{1,2}$ on a

$$\begin{cases} b_{1,1} = \cos(\alpha), b_{1,2} = -\sin(\alpha), b_{2,1} = \sin(\alpha), b_{2,2} = \cos(\alpha) \\ b_{i,i} = 1 \text{ si } i \in \llbracket 2, n \rrbracket \\ b_{i,j} = 0 \text{ si non} \end{cases}$$

Comme $c_{i,j} = \sum_k a_{i,k} b_{k,j}$ alors

$$\text{Tr}(AU_{1,2}) = \sum_{i=1}^n c_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,i}.$$

Divisons cette somme suivant $i = k$ et $i \neq k$

$$\text{Tr}(AU_{1,2}) = \sum_{i=1}^n a_{i,i} b_{i,i} + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n a_{i,k} b_{k,i}.$$

La première somme vaut

$$\sum_{i=1}^n a_{i,i} b_{i,i} = \cos(\alpha) a_{1,1} + \cos(\alpha) a_{2,2} + \sum_{i=3}^n a_{i,i}$$

Dans la deuxième somme, on distingue les cas $i = 1, 2$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n a_{i,k} b_{k,i} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 1}}^n a_{1,k} b_{k,1} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 2}}^n a_{2,k} b_{k,2} + \sum_{i=3}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n a_{i,k} b_{k,i}.$$

on a

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 1}}^n a_{1,k} b_{k,1} = a_{1,2} b_{2,1} + \sum_{k=3}^n a_{1,k} b_{k,1} \text{ et } \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 2}}^n a_{2,k} b_{k,2} = a_{2,1} b_{1,2} + \sum_{k=3}^n a_{2,k} b_{k,2}.$$

comme $b_{2,1} = \sin(\alpha)$, $b_{1,2} = -\sin(\alpha)$ et $b_{k,1} = b_{k,2} = 0$ pour $k \in \llbracket 3, n \rrbracket$ alors

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 1}}^n a_{1,k} b_{k,1} = \sin(\alpha) a_{1,2} \text{ et } \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 2}}^n a_{2,k} b_{k,2} = -\sin(\alpha) a_{2,1}.$$

De même $b_{k,i} = 0$ pour $i \in \llbracket 3, n \rrbracket$ et $k \neq i$ donc

$$\sum_{i=3}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n a_{i,k} b_{k,i} = 0$$

Ce qui donne

$$\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n a_{i,k} b_{k,i} = \sin(\alpha) a_{1,2} - \sin(\alpha) a_{2,1}.$$

Ainsi $\boxed{\text{Tr}(AU_{1,2}) = (a_{1,1} + a_{2,2}) \cos(\alpha) + (a_{1,2} - a_{2,1}) \sin(\alpha) + \sum_{i=3}^n a_{i,i}}.$

On peut écrire aussi $\boxed{\text{Tr}(AU_{1,2}) = (a_{1,1} + a_{2,2}) (\cos(\alpha) - 1) + (a_{1,2} - a_{2,1}) \sin(\alpha) + \text{Tr}(A)}.$

iii) On a $\forall U \quad \text{Tr}(AU) \leq \text{Tr}(A)$ et $U_{1,2} \in \mathcal{O}(n)$ pour tout α dans $\mathbb{R}$, donc $\text{Tr}(AU_{1,2}) \leq \text{Tr}(A)$.

Ce qui donne pour tout α dans $\mathbb{R}$

$$(a_{1,1} + a_{2,2}) \cos(\alpha) + (a_{1,2} - a_{2,1}) \sin(\alpha) \leq (a_{1,1} + a_{2,2})$$

d'après Q2.a on a $a_{1,2} = a_{2,1}$.

iv) Soit p et q tels que $1 \leq p < q \leq n$, posons $U_{p,q} = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

On a

$$\begin{aligned} u_{p,q}(e_p) &= \cos(\alpha) e_p + \sin(\alpha) e_q, \\ u_{p,q}(e_q) &= -\sin(\alpha) e_p + \cos(\alpha) e_q \\ u_{p,q}(e_k) &= e_k \text{ si } k \notin \{p, q\} \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} b_{p,p} &= \cos(\alpha), b_{p,q} = -\sin(\alpha), b_{q,p} = \sin(\alpha), b_{q,q} = \cos(\alpha), \\ b_{k,k} &= 1 \text{ si } k \notin \{p, q\} \\ b_{i,j} &= 0 \text{ si } i, j \notin \{p, q\} \text{ et } i \neq j \end{aligned}$$

Ainsi $U_{p,q}$ est de la forme

$$U_{p,q} = \left(\begin{array}{c|cc} \begin{array}{ccc} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{array} & \begin{array}{cc} 0 & \\ \end{array} & 0 \\ \hline \begin{array}{c} 0 \\ \end{array} & \begin{array}{ccccc} \cos(\alpha) & 0 & \dots & 0 & -\sin(\alpha) \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \dots & 0 & \cos(\alpha) \end{array} & 0 \\ \hline \begin{array}{c} 0 \\ \end{array} & \begin{array}{cc} 0 & \end{array} & \begin{array}{ccc} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{array} \end{array} \right)$$

v) Par un raisonnement similaire à 2.b)ii), on trouve

$$\mathrm{Tr}(AU_{p,q}) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \notin \{p,q\}}}^n a_{k,k} + (a_{p,p} + a_{q,q}) \cos(\alpha) + (a_{p,q} - a_{q,p}) \sin(\alpha).$$

vi) L'hypothèse $\text{Tr}(AU_{p,q}) \leq \text{Tr}(A)$ donne :

$$(a_{p,p} + a_{q,q}) \cos(\alpha) + (a_{p,q} - a_{q,p}) \sin(\alpha) \leq a_{p,p} + a_{q,q}$$

Comme en Q2.b)iii), cette inégalité, valable pour tout α , donc $a_{p,q} - a_{q,p} = 0$, soit $a_{p,q} = a_{q,p}$. Ceci est vrai pour tous $p < q$ donc vrai pour tout p, q . Ainsi, A est une matrice symétrique.

c) i) A est une matrice symétrique réelle. L'endomorphisme g canoniquement associé à A (dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, supposée orthonormée) est donc un endomorphisme symétrique (ou auto-adjoint).

Le théorème spectral affirme que g est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres.

Soit $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ une telle base, et γ_i les valeurs propres associées : $g(v_i) = \gamma_i v_i$.

ii) Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On considère l'endomorphisme w_j de $\mathbb{R}^n$ défini par

$$w_j(v_k) = \begin{cases} -v_j & \text{si } k = j \\ v_k & \text{si } k \in \llbracket 1, n \rrbracket \text{ et } k \neq j \end{cases}$$

- La matrice de w_j dans la base $\mathcal{V}$ est

$$\Delta_j = \text{Diag}(1, \dots, -1, \dots, 1)$$

donc w_j est une réflexion (la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan orthogonal à v_j).

Donc la matrice W_j de w_j relativement à la base $\mathcal{B}$ est $W_j = P\Delta_j P^{-1}$ où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{V}$ (*qui sont deux bases orthonormées*) donc P est une matrice orthogonale et $P^{-1} = P^T$.

Ainsi

$$W_j = P\Delta_j P^\top = P\text{Diag}(1, \dots, -1, \dots, 1)P^\top$$

W_j est donc une matrice orthogonale.

- La matrice de g dans la base $\mathcal{V}$ est $D_A = \text{Diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$. Donc $A = PD_AP^\top$ et $AW_j = P(D_A\Delta_j)P^\top$, avec

$$D_A \Delta_j = \text{Diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_{j-1}, -\gamma_j, \gamma_{j+1}, \dots, \gamma_n).$$

Ce qui donne

$$\text{Tr}(AW_j) = \text{Tr}(D_A \Delta_j) = -\gamma_j + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \gamma_k$$

et on a $\text{Tr}(D_A \Delta_j) = \sum_{k \neq j} \gamma_k - \gamma_j$.

$$\text{Tr}(A) = \text{Tr}(D_A) = \sum_{k=1}^n \gamma_k = \gamma_j + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \gamma_k.$$

On en déduit $\boxed{\text{Tr}(AW_j) = \text{Tr}(A) - 2\gamma_j}$.

- On a $W_j \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, l'hypothèse $\text{Tr}(AW_j) \leq \text{Tr}(A)$ donne $\text{Tr}(A) - 2\gamma_j \leq \text{Tr}(A)$, donc $-2\gamma_j \leq 0$, ce qui implique $\gamma_j \geq 0$.

- d)** On sait qu'une matrice symétrique réelle est positive (c'est-à-dire dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$) si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles.

Nous avons montré que A est symétrique (d'après Q2.b)vi)) et toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles (d'après Q2.c)ii)), donc.

Ainsi on a montré que : $\boxed{A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \text{ si et seulement si } \forall U \in \mathcal{O}(n) \quad \text{Tr}(AU) \leq \text{Tr}(A)}$.

FIN