

Épreuve de Mathématiques
(toutes filières)

Lundi 18 mai 2009 de 14h00 à 18h00

EXTRAIT

Problème I

A. Etude de deux applications

La notation $\mathbb{R}_2[X]$ désigne le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. On identifiera dans la suite de ce problème les éléments de $\mathbb{R}_2[X]$ et leurs fonctions polynomiales associées. On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On définit les deux applications suivantes :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_2[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P &\longmapsto \frac{1}{2} \left[P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_2[X] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ P &\longmapsto P(1) \end{aligned}$$

On rappelle aussi que l'on note $f^0 = \text{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n = f \circ f^{n-1}$.

1. Vérifier que f est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$ et montrer que f est linéaire.
2. Montrer que φ est linéaire.
3. Ecrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$, en indiquant les calculs intermédiaires.
4. L'application f est-elle injective ? surjective ?
5. Déterminer une base de $\text{Ker } \varphi$. Quelle est la dimension de $\text{Ker } \varphi$?
6. L'application φ est-elle injective ? surjective ?

B. Calcul des puissances successives d'une matrice

On note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Enfin, on note $\mathcal{B}'$ la famille de $\mathbb{R}_2[X]$ définie par

$$\mathcal{B}' = (1, -2X + 1, 6X^2 - 6X + 1).$$

7. Justifier que la famille $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

8. Ecrire la matrice de passage Q de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
9. Justifier que Q est inversible et calculer son inverse.
10. Ecrire la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}'$ en donnant les calculs intermédiaires.
11. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. On explicitera les neuf coefficients de A^n .
12. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $P = a + bX + cX^2$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, déterminer $f^n(P)$ en fonction de a, b, c .
13. En déduire que

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(f^n(P)) = \int_0^1 P(t) dt.$$

C. Une autre preuve du résultat précédent

14. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f^n(P) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right).$$

15. En déduire, en utilisant un résultat du cours d'analyse que l'on énoncera avec précision, que

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(f^n(P)) = \int_0^1 P(t) dt.$$

FIN

