

Probabilités

Partie 1

1) Notion de tribu

On dispose d'une **expérience aléatoire** (c'est qu'on ne peut pas prévoir son résultat).

Vocabulaire

L'ensemble des **issues** (ou **possibilités**) de cette expérience aléatoire s'appelle **Univers** et se note Ω .

Exemples

- 1) L'expérience est le lancer d'une pièce : $\Omega = \{P, F\}$
- 2) L'expérience est le lancer d'un dé : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$



Définition 1 (Tribu)

C'est toute partie T de $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant :

1) $\Omega \in T$

2) $\forall A \in T, \bar{A} \in T$

3) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de T , alors

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in T, \quad (T \text{ stable par réunion } \bigcup)$$

Prop 2

$\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu.

NB

$$A \in T \Leftrightarrow \bar{A} \in T$$

Prop 3

Soit T une tribu sur Ω . On a :

1) $\emptyset \in T$

2) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de T , alors

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in T, \quad (T \text{ stable par intersection } \cap)$$

3) Si A et $B \in T$, alors $A \setminus B \in T$

Démo

1) On a $\Omega \in T$, alors $\overline{\Omega} = \emptyset \in T$.

2) Supp que : $(\forall n \in \mathbb{N}, A_n \in T)$.

On veut montrer que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in T$.

Il suffit qu'on vérifie que $\overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n} \in T$.

On a :

$$\overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n} \in T, \text{ car } \begin{cases} \forall n, \overline{A_n} \in T \\ T \text{ stable par réunion} \end{cases}$$

3) Supp que A et $B \in T$. M. que $A \setminus B \in T$.

$$\text{On a : } A \setminus B = A \cap \overline{B}$$

$$\begin{aligned} &= A \cap \overline{B} \cap \Omega \cap \Omega \cap \dots \in T \\ &\quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ &\in T \quad \in T \quad \in T \quad \in T \quad \dots \end{aligned}$$

Résumé

$\mathcal{T}$ est une tribu sur Ω , on a :

1) ϕ et $\Omega \in \mathcal{T}$

2) $A \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \bar{A} \in \mathcal{T}$

3) $\forall A, B \in \mathcal{T}, A \setminus B \in \mathcal{T}$

4) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{T}$, alors

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T} \text{ et } \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}.$$

5) Si $(\forall 1 \leq k \leq n, A_k \in \mathcal{T})$ alors $\bigcup_{k=1}^n A_k$ et $\bigcap_{k=1}^n A_k \in \mathcal{T}$.

2) Notion de probabilité

Déf 1 (Probabilité sur $\mathcal{T}$)

C'est toute application $P: \mathcal{T} \rightarrow [0,1]$ vérifiant :

1) $P(\Omega) = 1$

2) Si $A \cap B = \phi$, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

3) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite **croissante** d'éléments

de $\mathcal{T}$ alors :

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n)$$

NB : $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite **croissante** veut dire

que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$$

Vocabulaire

0) $\forall A \in T, 0 \leq P(A) \leq 1$

1) Le triplet (Ω, T, P) s'appelle **espace probabilisé**.

2) Les éléments de T s'appellent **événements**.

3) Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont deux événements **incompatibles**.

4) $\emptyset$: l'événement **impossible**.

Ω : l'événement **certain**.

$\bar{A}$: l'événement **contraire** de A .

5) Si $P(A) = 0$, A est dit événement **quasi-impossible**.

Si $P(A) = 1$, A est dit événement **quasi-certain**.

6) $A \cap B$ se lit : A **et** B .

$A \cup B$ se lit : A **ou** B .

7) $A \subset B$ se lit : "Si A alors B "

Déf 2

On dit que $A_1, \dots, A_n$ forment un **système complet d'événements** si et seulement si :

1) $\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$

2) $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$

NB

On dit de même que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements si et si :

$$1) \forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$$

$$2) \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \Omega$$

R/R

Cela veut dire que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une partition de Ω .

Prop 3

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé.

1) $\{A, \bar{A}\}$ est un système complet d'événements.

$$2) P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$3) P(\emptyset) = 0$$

4) Supposons que $A \subset B$. On a :

$$i) P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$$

$$ii) P(A) \leq P(B)$$

5) Si $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille d'événements deux à deux incompatibles alors :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

6) En général, si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements deux à deux incompatibles alors :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

Démo

1) $\{A, \bar{A}\}$ est un système complet d'événement.

$$\text{Car } (A \cap \bar{A} = \emptyset \text{ et } A \cup \bar{A} = \Omega)$$

$$2) P(\bar{A}) = 1 - P(A) ?$$

$$1 = P(\Omega)$$

$$= P(A \cup \bar{A})$$

$$= P(A) + P(\bar{A})$$

$$3) P(\emptyset) = 0 ?$$

$$P(\emptyset) = P(\bar{\Omega})$$

$$= 1 - P(\Omega)$$

$$= 0$$

4) Supposons que $A \subset B$.

$$i) P(B \setminus A) = P(B) - P(A) ?$$

$$\text{On a } \begin{cases} B = A \cup (B \setminus A) \\ A \text{ et } B \setminus A \text{ sont incompatibles} \end{cases}$$



d'où :

$$P(B) = P(A \cup (B \setminus A))$$

$$= P(A) + P(B \setminus A)$$

$$\Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$$

$$\text{ii)} P(A) \leq P(B) ?$$

$$\text{On a } P(B) - P(A) = P(B \setminus A) \geq 0 \quad (\text{car } P(M) \in [0, 1])$$

5) Si $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille d'événements deux à deux incompatibles alors :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

En fait :

Par récurrence sur $n \geq 2$ et via la définition d'une probabilité.

6) En général, si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements deux à deux incompatibles alors :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

En fait :

$$\text{Posons } B_n = \bigcup_{k=0}^n A_k. \text{ On a } (\forall n \in \mathbb{N}, B_n \subset B_{n+1})$$

$$\text{D'où } P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n)$$

$$\text{D'autre part, } P(B_n) = P\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) = \sum_{k=0}^n P(A_k).$$

$$\text{Alors } P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n P(A_k) \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(A_k)$$

$$\text{Or } \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$$

$$\text{Alors } P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

Résumé

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé.

1) $P(\Omega) = 1$ $P(\emptyset) = 0$

2) Si $A \cap B = \emptyset$, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

3) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'éléments

de $\mathcal{T}$ alors :

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n)$$

2) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

4) Supposons que $A \subset B$. On a :

i) $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$

ii) $P(A) \leq P(B)$

5) Si $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille d'événements deux à deux incompatibles alors :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

6) En général, si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements deux à deux incompatibles alors :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

3) Probabilité Conditionnelle

Dans toute la suite du chapitre, $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ est un espace probabilisé.

Déf 1

Supposons que $P(B) \neq 0$.

La probabilité de A sachant que l'événement B est réalisé se note $P(A|B)$ ou $P_B(A)$, et est définie par :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Prop 2

Supposons que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$. On a :

$$P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(B|A) \times P(A)$$

Prop 3

Supposons que $P(B) \neq 0$.

L'application $A \mapsto P(A|B)$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$.

Démo

1) $P(\Omega|B) = 1$?

$$P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

2) Supp que $A \cap A' = \emptyset$. Montrer :

$$P(A \cup A' | B) = P(A|B) + P(A'|B)$$

$A \mapsto P(A|B)$
proba?

$$P(A \cup A' | B) = \frac{P((A \cup A') \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P((A \cap B) \cup (A' \cap B))}{P(B)}$$

$$= P(A | B) + P(A' | B)$$

$$= \frac{P(A \cap B) + P(A' \cap B)}{P(B)} \quad (\text{car } (A \cap B) \cap (A' \cap B) = \emptyset)$$

$$= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A' \cap B)}{P(B)}$$

$$= P(A | B) + P(A' | B)$$

3) Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante d'événements.

Montrons que :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n | B\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n | B)$$

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n | B\right) = \frac{P\left(\left[\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right] \cap B\right)}{P(B)}$$

$$= \frac{P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} (A_n \cap B)\right)}{P(B)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n | B)$$

$$B \cap \left(\bigcup_n A_n\right) = \bigcup_n (B \cap A_n)$$

Or $(A_n)_n$ croissante alors $(A_n \cap B)_{n \in \mathbb{N}}$ l'est aussi.

$$\Rightarrow P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} (A_n \cap B)\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n \cap B)$$

Donc

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n | B\right) = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n \cap B)}{P(B)}$$

$$? = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n | B)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{P(A_n \cap B)}{P(B)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n | B)$$

Réflexes

$A \mapsto P(A | B)$ est une probabilité, d'où :

$$1) P(\bar{A} | B) = 1 - P(A | B)$$

$$2) P\left(\bigcup_i A_i | B\right) = \sum_i P(A_i | B), \text{ si les } A_i \text{ sont 2 à 2 incompatibles.}$$

4) Formule des probabilités totales

Prop 9

Soit $(A_1, \dots, A_n)$ un système complet d'événements tel que :

$$(\forall i, P(A_i) \neq 0)$$

Pour tout événement B on a :

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i)$$

Càd :

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B | A_i) \times P(A_i)$$

Vocabulaire

Ces deux formules équivalentes s'appellent « Formule des probabilités totales ». (FPT).

Démo

1) Montrer : $P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i)$

On a $\Omega = \bigcup_{i=1}^n A_i$ car $(A_1, \dots, A_n)$ est une S.C.E.

$$\Rightarrow B = B \cap \Omega \quad (\text{car } B \subset \Omega)$$

$$= B \cap \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right)$$

$$= \bigcup_{i=1}^n (B \cap A_i)$$

D'où :

$$P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^n (B \cap A_i)\right)$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i)$$

$$= \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i) \quad \left(\text{car les } (B \cap A_i) \text{ sont deux à deux incompatibles.} \right)$$

□

2) Montrer : $P(B) = \sum_{i=1}^n P(B|A_i) \times P(A_i)$

Cela vient de $\ll P(B \cap A_i) = P(B|A_i) \times P(A_i) \gg$, et de

la formule $P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i)$.

□

Exercice d'application

On dispose d'une urne contenant 3 boules noires et 4 boules blanches.

B	N
4	3

On tire 2 boules successivement et sans remise.

Considérons les deux événements suivants :

B_1 : « La 1^{ère} boule tirée est blanche »

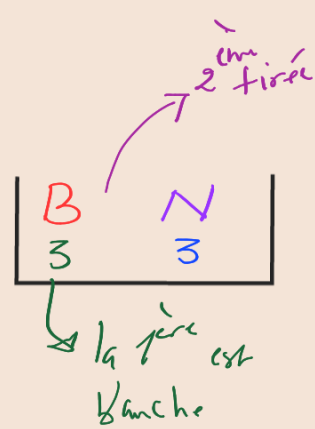
B_2 : « La 2^{ème} boule tirée est blanche »

- 1) Quelle est la probabilité que la 2^{ème} boule tirée soit blanche sachant que la 1^{ère} boule tirée est blanche ?
- 2) Quelle est la probabilité que les deux boules tirées soient blanches ?
- 3) Quelle est la probabilité que la 2^{ème} boule tirée soit blanche ?
- 4) Quelle est la probabilité que la 1^{ère} boule tirée soit blanche sachant que la 2^{ème} boule tirée est blanche ?

Sol

- 1) Quelle est la probabilité que la 2^{ème} boule tirée soit blanche sachant que la 1^{ère} boule tirée est blanche ?

Donc $P(B_2|B_1) = \frac{3}{6}$ □

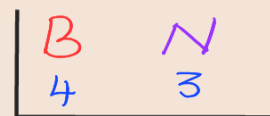


B_1 : « La 1^{ère} boule tirée est blanche »

B_2 : « La 2^{ème} boule tirée est blanche »

2) Quelle est la probabilité que les deux boules tirées soient blanches ?

Càd $P(B_1 \cap B_2) = ?$



$P(B_1 \cap B_2) = \underbrace{P(B_2|B_1)}_{=3/6} \underbrace{P(B_1)}_{=4/7} = \frac{2}{7}$

3) Quelle est la probabilité que la 2^{ème} boule tirée soit blanche ?

Il s'agit de calculer $P(B_2)$.



On a que : $\begin{cases} P(B_2|B_1) = \frac{3}{6} \\ P(B_2|\bar{B}_1) = \frac{4}{6} \end{cases}$

B_1 : « La 1^{ère} boule tirée est blanche »

B_2 : « La 2^{ème} boule tirée est blanche »

Alors on passera à la FPT avec le SCE $\{B_1, \bar{B}_1\}$.

Donc : $P(B_2) = \underbrace{P(B_2|B_1)}_{=3/6} \underbrace{P(B_1)}_{=4/7} + \underbrace{P(B_2|\bar{B}_1)}_{=4/6} \underbrace{P(\bar{B}_1)}_{=3/7} = \frac{4}{7}$

4) Quelle est la probabilité que 1^{ère} boule tirée soit blanche sachant que la 2^{ème} boule tirée est blanche?

Càd $P(B_1 | B_2) = ?$

B	N
4	3

On a :

$$P(B_1 | B_2) = \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_2)}$$

$$P(B_2 | B_1) = \frac{3}{6}$$

$$P(B_2 | \bar{B}_1) = \frac{4}{6}$$

$$P(B_2) = P(B_2 | B_1) P(B_1) + P(B_2 | \bar{B}_1) P(\bar{B}_1) \quad (\text{FPT})$$

$$= \frac{4}{7}$$

$$P(B_1 \cap B_2) = \underbrace{P(B_2 | B_1)}_{= \frac{3}{6}} \underbrace{P(B_1)}_{= \frac{4}{6}} = \frac{2}{7}$$

$$\text{Donc } \left(P(B_1 | B_2) = \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_2)} = \frac{1}{2} \right)$$



5) Formule de Bayes

Prop 10 (Formule de Bayes)

Si $\left\{ \begin{array}{l} 1) (A_1, \dots, A_n) \text{ est un système complet d'événements.} \\ 2) \forall i, P(A_i) \neq 0 \end{array} \right.$

Alors :

$$\forall B \in \mathcal{T}, \forall j \in [1, n], P(A_j | B) = \frac{P(B | A_j) \times P(A_j)}{\sum_{i=1}^n P(B | A_i) \times P(A_i)}$$

Démo

Montrer que :
$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j) \times P(A_j)}{\sum_{i=1}^n P(B|A_i) \times P(A_i)}$$

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)}$$

Et on a : $P(A_j \cap B) = P(B \cap A_j) = P(B|A_j) \times P(A_j)$

et que : $P(B) = \sum_{i=1}^n P(B|A_i) \times P(A_i)$, d'après la FPT.

D'où :

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j) \times P(A_j)}{\sum_{i=1}^n P(B|A_i) \times P(A_i)}$$

□

N.B :

En général les élèves ne mémorisent pas cette formule de Bayes mais ils la redémontrent en deux lignes en cas de besoin.

Exercice d'application (Extrait du TD)

Pour aller à l'école, Ali emprunte au hasard l'un des trois itinéraires possibles : I_1, I_2 ou I_3 .

S'il emprunte I_1 , il arrive à l'heure.

S'il emprunte I_2 , il arrive à l'heure avec la probabilité $3/4$.

S'il emprunte I_3 , il arrive à l'heure avec la probabilité $2/3$.

Aujourd'hui, Ali est arrivé à l'heure. Quelle est la probabilité qu'il avait pris I_1 ?

Solution

Considérons les événements suivants :

I_1 : « Ali emprunte l'itinéraire I_1 »

I_2 : « Ali emprunte l'itinéraire I_2 »

I_3 : « Ali emprunte l'itinéraire I_3 »

H : « Ali arrive à l'heure »

Résumé des hypothèses

$$P(I_1) = \frac{1}{3}$$

$$P(I_2) = \frac{1}{3}$$

$$P(I_3) = \frac{1}{3}$$

$$P(H|I_1) = 1$$

$$P(H|I_2) = \frac{3}{4}$$

$$P(H|I_3) = \frac{2}{3}$$

On nous demande de calculer $P(I_1|H)$

On a :

$$\begin{aligned} P(I_1|H) &= \frac{P(I_1 \cap H)}{P(H)} \\ &= \frac{\overbrace{P(H|I_1)}^{=1} \times \overbrace{P(I_1)}^{1/3}}{P(H|I_1) \cdot \underbrace{P(I_1)}_{1/3} + P(H|I_2) \cdot \underbrace{P(I_2)}_{1/3} + P(H|I_3) \cdot \underbrace{P(I_3)}_{1/3}} \\ &= \frac{1 \times \frac{1}{3}}{1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}} \\ &= \frac{12}{29} \end{aligned}$$

$$P(I_1) = \frac{1}{3}$$

$$P(I_2) = \frac{1}{3}$$

$$P(I_3) = \frac{1}{3}$$

$$P(H|I_1) = 1$$

$$P(H|I_2) = \frac{3}{4}$$

$$P(H|I_3) = \frac{2}{3}$$

Notez que I_1, I_2, I_3 forment un système complet d'événements :

$I_1 \cap I_2 = \emptyset$ car c'est impossible que Ali emprunte I_1 et I_2 en même temps
et impossible

$$I_1 \cup I_2 \cup I_3 = \Omega$$



6) Formule des probabilités composées

On sait que : $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \times P(A_2 | A_1)$.

Q Que vaut $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = ?$

Rapports

$$P(X \cap Y) = P(Y) \times P(X | Y)$$
$$P(X \cap Y) = P(X) \times P(Y | X)$$

Rép

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_3 | A_1 \cap A_2) \times P(A_2 | A_1) \times P(A_1)$$

En effet :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_3 | A_1 \cap A_2) \times P(A_1 \cap A_2)$$

$$= P(A_3 | A_1 \cap A_2) \times P(A_2 | A_1) \times P(A_1)$$

En général , on a :

Prop 11 (Formule des probabilités composées)

Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements quelconques tels que :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n) \neq 0$$

On a :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2 | A_1) \times P(A_3 | A_1 \cap A_2) \times$$
$$\dots \times P(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Exercice d'application

On dispose d'une urne contenant 4 boules noires et 5 boules blanches.

B	N
5	4

On tire 3 boules successivement et sans remise.

Quelle est la probabilité que ces 3 boules tirées soient toutes blanches ?

Solution

Considérons les événements suivants :

B_1 : « La 1^{ère} boule tirée est blanche »

B_2 : « La 2^{ème} boule tirée est blanche »

B_3 : « La 3^{ème} boule tirée est blanche »

On veut calculer $P(B_1 \cap B_2 \cap B_3)$.

On a :

B	N
5	4

$$\begin{aligned} P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) &= P(B_1) \times P(B_2|B_1) \times P(B_3|B_1 \cap B_2) \\ &= \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{3}{7} \\ &= \frac{5}{42} \end{aligned}$$

□

7) Indépendance d'événements

Prop et déf 12

Soient A et B deux événements tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$.

1) Les propositions suivantes sont équivalentes :

$$i) P(A/B) = P(A)$$

$$ii) P(B/A) = P(B)$$

$$iii) P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

2) Si l'une de ces propositions est vérifiée, on dit que les événements A et B sont indépendants.

Démo

$$\underbrace{P(A/B) = P(A)}_{(i)} \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}_{(iii)}$$

De même :

$$\underbrace{P(B/A) = P(B)}_{(ii)} \Leftrightarrow \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = P(B)$$

$$\Leftrightarrow P(B \cap A) = P(A) \times P(B)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}_{(iii)}$$



Vocabulaire

$A_1, \dots, A_n$ sont dits deux à deux indépendants si et si :

$\forall i \neq j, A_i$ et A_j sont indépendants

Déf 13

Les événements $A_1, \dots, A_n$ sont dits indépendants si et si pour toute partie finie I de $\{1, \dots, n\}$, on a :

$$P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i)$$



On a en particulier : $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \times \dots \times P(A_n)$

Vocabulaire

On parle aussi de « mutuellement indépendants ».

NB :

L'égalité $P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i)$ est toujours vérifiée si I est un singleton.

Prop 14

$$\left(A_1, A_2 \text{ et } A_3 \text{ sont indépendants} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} 1) A_1, A_2 \text{ et } A_3 \text{ sont deux à deux indépendants.} \\ 2) P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) P(A_2) P(A_3) \end{cases}$$

Démo

On prend :

- 1) correspond aux paires $\{i, j\}$ de $\{1, 2, 3\}$.
- 2) correspond à $I = \{1, 2, 3\}$

Prop 15

Si $(A_1, \dots, A_n)$ sont indépendants

Alors $(A_1, \dots, A_n)$ sont deux à deux indépendants

Démo (En bref)

Supp que $i \neq j$. M que $P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \times P(A_j)$.

Pour $I = \{i, j\}$, l'égalité $P(\bigcap_{k \in I} A_k) = \prod_{k \in I} P(A_k)$ c'est:

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \times P(A_j)$$

□

Attention

La réciproque est en général **fausse**.

Voir le contre-exemple dans l'exercice suivant:

En général, on a :

Prop 16 (indépendance mutuelle) (cas général)

La famille d'événements $(A_i)_{i \in I}$ est mutuellement indépendante

si et seulement si pour toute partie finie K de I , on a :

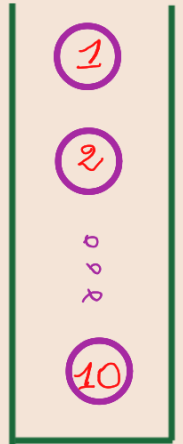
$$P\left(\bigcap_{i \in K} A_i\right) = \prod_{i \in K} P(A_i)$$

Exercice

On dispose d'une urne contenant 10 boules numérotées de 1 à 10.

On tire 2 boules successivement et avec remise.

Considérons les trois événements suivants :



P_1 : « La 1^{ère} boule tirée porte un numéro pair. »

P_2 : « La 2^{ème} boule tirée porte un numéro pair. »

SP : « La somme des numéros des deux boules tirées est un nombre pair. »

Montrer que :

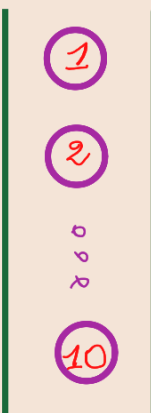
- 1) Les événements P_1 , P_2 et SP sont deux à deux indépendants.
- 2) Les événements P_1 , P_2 et SP ne sont pas indépendants.

Solution

1) Les événements P_1 , P_2 et SP sont deux à deux indépendants ?

i) P_1 et P_2 indépendants ?

$P(P_2|P_1) = P(P_2)$ est évidente.



ii) P_1 et SP indépendants ?

M que $P(SP | P_1) = P(SP)$?

$$P(SP | P_1) = P(P_2) \quad \begin{array}{l} \text{pair + pair = pair} \\ \text{pair + impair = impair} \end{array}$$
$$= \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$P(SP) = \underbrace{P(SP | P_1)}_{=P(P_2)} \underbrace{P(P_1)}_{\frac{5}{10}} + \underbrace{P(SP | P_2)}_{=P(P_2)} \underbrace{P(P_2)}_{\frac{5}{10}}$$
$$= \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

1

2

3
4
5

10

iii) P_2 et SP indépendants ?

M que $P(SP | P_2) = P(SP)$?

$$P(SP | P_2) = P(P_2) \quad \begin{array}{l} \text{pair + pair = pair} \\ \text{pair + impair = impair} \end{array}$$
$$= \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$P(SP) = \frac{1}{2}$$

2) Les événements P_1 , P_2 et SP ne sont pas indépendants ?

(On montrera que : $P(P_1 \cap P_2 \cap SP) \neq P(P_1) P(P_2) P(SP)$)

$$\text{On a : } \underbrace{P(P_1)}_{\frac{1}{2}} \underbrace{P(P_2)}_{\frac{1}{2}} \underbrace{P(SP)}_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$$

1

2

...

10

Et on a :

$$P(P_1 \cap P_2 \cap SP) \overset{\text{formule des probabilités composées}}{=} \underbrace{P(P_1)}_{\frac{1}{2}} \times \underbrace{P(P_2 | P_1)}_{\frac{1}{2}} \times \underbrace{P(SP | P_1 \cap P_2)}_1$$

$$= \frac{1}{4}$$

D'où

$$P(P_1 \cap P_2 \cap SP) \neq P(P_1) P(P_2) P(SP)$$



Fin