Séries numériques

Exercice 1 :

Déterminer la nature de la série $\sum_n u_n$ dans chacun des cas suivants :

1) $u_n = \frac{ch(n)}{ch(2n)}$ 2) $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ 3) $u_n = e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

4) $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ 5) $u_n = \frac{1}{ncos^2 n}$ 6) $u_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

Exercice 2 :

Déterminer la nature de la série $\sum_n u_n$ dans chacun des cas suivants :

1) $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ 2) $u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n+(-1)^n)}$ 3) $u_n = \frac{(-1)^n}{\ln n+(-1)^n}$

4) $u_n = \sqrt{n+(-1)^n} - \sqrt{n}$ 5) $u_n = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n+1}\right)$ 6) $u_n = \sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right)$

7) $u_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^{n-1}}$ 8) $u_n = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ 9) $u_n = \frac{1}{n^\alpha}\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{3}{2}}$

Exercice 3 :

Soit $\sum_n u_n$ une série à termes positifs. Notons $v_n = \frac{u_n}{u_n+1}$. Montrons que

$$\sum_n u_n \ converge \Leftrightarrow \sum_n v_n \ converge$$

Exercice 4 :

1) Notons $u_n = \sin\left((2-\sqrt{3})^n\pi\right)$

   i) Montrer que la série $\sum_n u_n$ est à termes positifs.

   ii) Quelle est sa nature ?

2) Posons $A_n = (2-\sqrt{3})^n + (2+\sqrt{3})^n$. Montrer que $A_n \in \mathbb{N}$.

3) En déduire la nature de la série $\sum_n v_n$; où $v_n = \sin\left((2+\sqrt{3})^n\pi\right)$

Exercice 5 :

Justifier l'existence des sommes suivantes et calculer-les :

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ 2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5n+6}{n(n+1)(n+2)}$ 3) $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ 4) $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$

5) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n}$ 6) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)}$ 7) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 8) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{th\left(\frac{a}{2^n}\right)}{2^n}$

Exercice 6 :

On donne les sommes : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$.

Calculer les sommes suivantes après avoir justifié leurs existences :

1) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ 2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2}$ 3) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!}$ 4) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-2}{n!}$

Exercice 7 :

Posons $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.

1) Justifier la convergence de la série $\sum_{n \succeq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ et préciser $\lim_{n\to+\infty} R_n$.

2) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ R_n + R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$$

3) Déterminer un équivalent simple de R_n.

4) Quelle est la nature de la série $\sum_{n \succeq 1} R_n$?.

Exercice 8 :

Considérons deux suites complexes $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Posons $u_n = \alpha_n v_n$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$.

1) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) S_k + \alpha_n S_n$$

2) Supposons maintenant que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est réelle positive décroissante de limite nulle, et qe la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
Montrer que la série $\sum_n (\alpha_n - \alpha_{n+1}) S_n$ converge absolument et que la série $\sum_n u_n$ converge.

3) Soient $\beta \succ 0$ et $\theta \in \mathbb{R}|2\pi\mathbb{Z}$.
   i) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |\ 1 + e^{i\theta} + \cdots + e^{in\theta}\ | \preceq \frac{1}{|\sin(\theta/2)|}$$

ii) En déduire la convergence des séries $\sum_{n\succeq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\beta}$, $\sum_{n\succeq 1} \frac{\cos(n)}{n}$ et $\sum_{n\succeq 1} \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}$.

Exercice 9 :

Notons $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1) Montrer que $H_n \sim \ln(n)$

2) Posons $U_n = H_n - \ln(n)$.

i) Montrer que $(U_{n+1} - U_n) = O(1/n^2)$.

ii) En déduire que

$$\exists \eta \in \mathbb{R} \ , H_n = \ln(n) + \eta + o(1)$$

3) Posons $V_n = H_n - \ln(n) - \eta$.

i) Montrer que $(V_{n+1} - V_n) \sim \frac{-1}{n^2}$

ii) En déduire que $V_n \sim \frac{1}{2} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$

4) i) Montrer via une comparaison série-intégrale que

$$\forall \alpha \succ 1, \ \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

ii) En déduire que $H_n = \ln(n) + \eta + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

Exercice 10 : (Séries de Bertrand)

1) Montrer que $\sum_{n\succeq 1} \frac{\ln(n)}{n^2}$ converge et que $\sum_{n\succeq 2} \frac{1}{\sqrt{n}(\ln n)^2}$ diverge.

2) Montrer que

$$\forall \beta \in \mathbb{R}, \ \forall \alpha \succ 1, \ \sum_{n\succeq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \ \textit{converge}$$

3) Montrer que

$$\forall \beta \in \mathbb{R}, \ \forall \alpha \prec 1, \ \sum_{n\succeq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \ \textit{diverge}$$

4) Par comparaison série-intégrale, montrer que

$$\sum_{n\succeq 2} \frac{1}{n(\ln n)^\beta} \ \textit{converge} \ \Leftrightarrow \ \beta \succ 1$$