

CONCOURS COMMUN 2007

DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Épreuve Spécifique de Mathématiques
(filière MPSI)

Vendredi 11 mai 2007 de 08h00 à 12h00

Extrait

Premier problème

I. Etude d'une fonction

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{-1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. Etudier la continuité à gauche et à droite, la dérivabilité à gauche et à droite de f en 0.
2. Etudier les limites et variations de f (à résumer dans un tableau) ; préciser les branches infinies.

3. Etudier la convexité ; préciser les points d'inflexion éventuels.
4. Tracer la courbe représentative $(\mathcal{C})$ de cette fonction relativement à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm).

On donne les valeurs approchées suivantes : $e^{-2} = 0,135$, $e^{-1} = 0,36$, $e = 2,72$.

On précisera les points remarquables utilisés.

II. Calcul d'aires

5. Etant donné un nombre réel h , $h \in]0,1[$, déterminer l'aire $\mathcal{A}(h)$ de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites d'équations $x = h$ et $x = 1$.
6. En déduire l'aire de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe $(\mathcal{C})$, la droite d'équation $x = 1$ et l'axe des ordonnées, c'est à dire $\lim_{h \rightarrow 0^+} \mathcal{A}(h)$.

III. Résolution d'une équation différentielle

7. Résoudre l'équation différentielle (E) $x^2 y' + (2x - 1)y = 0$ sur chacun des intervalles $]0, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$.
8. Cette équation (E) a-t-elle des solutions sur $\mathbb{R}$? Si oui, les préciser.

IV. Dérivées successives et polynômes associés

9. Démontrer que f est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.
10. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que

$$\forall x \in]0, +\infty[\quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n+2}} e^{-\frac{1}{x}} \quad \text{et que :}$$

$$(1) \quad P_{n+1}(x) = x^2 P_n'(x) + [1 - 2(n+1)x] P_n(x).$$

11. Calculer P_0, P_1, P_2, P_3 et P_4 .
12. Calculer le degré, le coefficient dominant et le terme constant de P_n .
13. On considère la fonction g telle que $g(x) = x^2 f(x)$.
Démontrer que $g^{(n+1)} = f^{(n)}$
14. Rappeler la formule de Leibniz relative à la dérivée n -ième d'un produit de fonctions en indiquant les hypothèses.
15. En utilisant la formule de Leibniz pour calculer $g^{(n)}(x)$, démontrer que :

$$(2) \quad P_{n+1}(x) = (1 - 2(n+1)x) P_n(x) - n(n+1)x^2 P_{n-1}(x).$$

16. En déduire que : (3) $P'_n(x) = -n(n+1)P_{n-1}(x)$.

17. Déduire de (1) que : (4) $x^2 P''_n(x) + (1-2nx)P'_n(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$.

FIN