Tous les exercices sont solutionnés

Espaces préhilbertiens réels

Exercice 1

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Considérons l'application Φ définie par :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X], \Phi(P, Q) = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$$

Montrer que Φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2) $E = C([-1, 1], \mathbb{R})$. Considérons l'application Ψ définie par :

$$\forall f, g \in E, \Psi(f, g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)(1 - t^2)dt$$

Montrer que Ψ est un produit scalaire sur E.

Exercice 2

$\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne canonique.
Notons $e_1 = (1, 0, 1, 0), e_2 = (1, -1, 1, -1)$ et $F = vect(e_1, e_2)$

1) Déterminer une base orthonormale de F.
2) Déterminer $d(x, F)$, où $x = (1, 1, 1, 1)$

Exercice 3

On considère l'application définie sur $M_n(\mathbb{R})^2$ par :

$$(A|B) = tr({}^tA.B)$$

1) Montrer que cette application est un produit scalaire pour lequel la base canonique est orthonormée. On note $||.||$ la norme associée.
2) Montrer que

$$\forall A \in M_n(\mathbb{R}), |tr(A)| \leq \sqrt{n}||A||$$

Exercice 4

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que $ker(A) = ker({}^tA.A)$
2) En déduire que :
   a) $rg(A) = rg({}^tA.A) = rg(A.{}^tA)$
   b) $Im(A) = Im(A.{}^tA)$

Exercice 5

$E=\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire usuel. Q est le plan d'équation cartésienne

$$Q:\ x-y+z=0$$

1) Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.
Déterminer $P_Q(x,y,z)$; la projection orthogonale de (x,y,z) sur Q.

2) Calculer $d(A,Q)$, où $A=(-1,2,1)$.

Exercice 6

$(E,<\cdot|\cdot>)$ un espace euclidien.

1) a un vecteur non nul de E et $D=vect(a)$.
Expliciter $P_D(x)$, la projection orthogonale de x sur D.

2) Soit H l'hyperplan orthogonal au vecteur ; c-à-d $H=(vect(a))^{\perp}$
Expliciter $P_H(x)$.

3) $E=\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire usuel.
Q est le plan d'équation cartésienne

$$Q:\ x-y+z=0$$

Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.
Déterminer $P_Q(x,y,z)$; la projection orthogonale de (x,y,z) sur Q.
Comparer avec le résultat trouvé dans : Exercice 5. 1).

Exercice 7

$M_2(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire : $(A|B)=tr({}^tA.B)$

$H=\{M\in M_2(\mathbb{R})/tr(M)=0\}$. $F=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ -b & a\end{pmatrix}/(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

$A=\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

1) a) Justifier que H est un hyperplan de $M_2(\mathbb{R})$
b) Déterminer $d(A,H)$.

2) a) Justifier que F est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$ et en déterminer une base.
b) Déterminer une base de $F^{\perp}$
c) Déterminer la projection orthogonale de A sur $F^{\perp}$

CORRECTION

CORRECTION

CORRECTION

Exercice 1

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Considérons l'application Φ définie par :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X], \Phi(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$$

Montrer que Φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

i) Montrons que ϕ est symétrique

Soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$. M.que $\phi(P,Q) = \phi(Q,P)$.

On a :

$$\phi(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} P(k)\,Q(k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} Q(k)\,P(k)$$

$$= \phi(Q,P)$$

ii) Montrons que ϕ est linéaire par rapport à la 1ère place.

Soient $P, Q, R \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

M. que $\phi(\lambda P + Q, R) = \lambda\,\phi(P,R) + \phi(Q,R)$

$$\phi(\lambda P + Q, R) = \sum_{k=0}^{n} \big(\lambda P(k) + Q(k)\big) R(k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \big(\lambda P(k) R(k) + Q(k) R(k)\big)$$

$$= \lambda \sum_{k=0}^{n} P(k) R(k) + \sum_{k=0}^{n} Q(k) R(k)$$

$$= \lambda \phi(P,R) + \phi(Q,R)$$

iii) Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$. M. que $\phi(P,P) \geqslant 0$

On a :

$$\phi(P,P) = \sum_{k=0}^{n} \left(P(k)\right)^2 \geqslant 0 .$$

iv) Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que $\phi(P,P) = 0$.

M. que $P = 0$

On a $\phi(P,P) = 0$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \left(P(k)\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \forall k \in \{0, \dots, n\}, \ \left(P(k)\right)^2 = 0 \quad \left(\begin{array}{l}\text{Somme nulle de} \\ \text{nombres positifs}\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \forall k \in \{0, \dots, n\}, \ P(k) = 0$$

$$\Rightarrow P = 0, \text{ car } \begin{cases} P \text{ possède } (n+1) \text{ racines distinctes} \\ \deg(P) \leqslant n \end{cases}$$

Enfin, de i), ii), iii) et iv) on tire que ϕ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$.

---

2) $E = C([-1,1],\mathbb{R})$. Considérons l'application Ψ définie par :

$$\forall f,g \in E, \Psi(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)(1-t^2)dt$$

Montrer que Ψ est un produit scalaire sur E.

i) Montrons que Ψ est symétrique

Soient $f,g \in E$. M.que $\Psi(f,g) = \Psi(g,f)$.

On a :

$$\Psi(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t)\,g(t)\,(1-t^2)\,dt$$

$$= \int_{-1}^{1} g(t)\,f(t)\,(1-t^2)\,dt$$

$$= \Psi(g,f)$$

$$\Psi(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)(1-t^2)dt$$

ii) Montrons que Ψ est linéaire par rapport à la 1ère place

Soient $f,g,h \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

M. que $\Psi(\lambda f+g, h) = \lambda \Psi(f,h) + \Psi(g,h)$.

On a :

$$\Psi(\lambda f+g, h) = \int_{-1}^{1} \big(\lambda f(t)+g(t)\big)\,h(t)\,(1-t^2)\,dt$$

$$= \int_{-1}^{1} \Big(\lambda f(t)\,h(t)\,(1-t^2) + g(t)\,h(t)\,(1-t^2)\Big)\,dt$$

$$= \lambda \int_{-1}^{1} f(t)h(t)(1-t^2)\,dt + \int_{-1}^{1} g(t)h(t)(1-t^2)\,dt$$

$$= \lambda \Psi(f,h) + \Psi(g,h)$$

$$\Psi(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)(1-t^2)dt$$

iii) Soit $f \in E$. M. que $\Psi(f,f) \geqslant 0$

On a :

$$\Psi(f,f) = \int_{-1}^{1} f^2(t)(1-t^2)\,dt \geqslant 0 \text{ car } \left(\forall t \in [-1,1],\ f^2(t)(1-t^2) \geqslant 0\right)$$

iv) Soit $f \in E = C([-1,1],\mathbb{R})$ telle que $\Psi(f,f) = 0$.

M. que $f = 0$; càd $\boxed{\forall t \in [-1,1],\ f(t) = 0}$.

On a $\Psi(f,f) = 0$.

$$\Longrightarrow \int_{-1}^{1} f^2(t)(1-t^2)\,dt = 0$$

Or $\begin{cases} \forall t \in [-1,1],\ f^2(t)(1-t^2) \geqslant 0 \\ \int_{-1}^{1} f^2(t)(1-t^2)\,dt = 0 \\ \text{La fonction } t \mapsto f^2(t)(1-t^2) \text{ est continue sur } [-1,1] \end{cases}$

Alors $\left(\forall t \in [-1,1],\ f^2(t)(1-t^2) = 0\right)$

$$\Longrightarrow \forall t \in]-1,1[,\ f^2(t)\underbrace{(1-t^2)}_{\neq 0} = 0$$

$$\Longrightarrow \forall t \in]-1,1[,\ f^2(t) = 0$$

$\Rightarrow \forall t \in]-1,1[, f(t)=0$

$\boxed{\forall t \in [-1,1], f(t)=0}$??

Par passage aux limites on a :

$$\lim_{t \to 1} f(t) = \lim_{t \to -1} f(t) = 0$$

$\underbrace{\lim_{t \to 1} f(t)}_{= f(1)}$ car f continue en 1

$\underbrace{\lim_{t \to -1} f(t)}_{= f(-1)}$ car f continue en -1

$\Rightarrow f(1)=0$ et $f(-1)=0$

Par suite : $\boxed{\forall t \in [-1,1], f(t)=0}$

Enfin, de i), ii), iii) et iv) on tire que φ est un produit scalaire sur E.

Fin Exercice 1

Exercice 2

$\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

Notons $e_1 = (1,0,1,0)$, $e_2 = (1,-1,1,-1)$ et $F = vect(e_1, e_2)$

1) Déterminer une base orthonormale de F.

(e_1, e_2) une base de F ; espace euclidien muni du produit scalaire réel : $\langle (x,y,z,t) \mid (x',y',z',t') \rangle = xx' + yy' + zz' + tt'$

À partir de la base (e_1, e_2) de F, on construit une base orthonormale $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ grâce au procédé de Gram-Schmidt suivant :

$\langle (x,y,z,t) \mid (x',y',z',t') \rangle = xx' + yy' + zz' + tt'$

i) $\varepsilon_1 = ?$

$$\varepsilon_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}.$$

On a $\|e_1\| = \sqrt{\langle e_1 | e_1 \rangle}$; $e_1 = (1,0,1,0)$

$= \sqrt{2}$

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0)}$$

ii) $\varepsilon_2 = ?$

$$\varepsilon_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} \text{ ; où } v_2 = \underbrace{e_2}_{(1,-1,1,-1)} - \langle \underbrace{e_2}_{(1,-1,1,-1)} | \underbrace{\varepsilon_1}_{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0)} \rangle \cdot \underbrace{\varepsilon_1}_{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0)}$$

On trouve $U_2 = (0,-1,0,-1)$

et donc $\|U_2\| = \sqrt{2}$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,0,-1)}$$

Enfin :

$(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ est une base orthonormée de F, où :

$\mathcal{E}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0)$ et $\mathcal{E}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,0,-1)$

$\square$

$\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne canonique.
Notons $e_1 = (1,0,1,0), e_2 = (1,-1,1,-1)$ et $F = vect(e_1, e_2)$

1) Déterminer une base orthonormale de F.

2) Déterminer $d(x,F)$, où $x = (1,1,1,1)$

$d(x,F) = \|x - P_F(x)\|$; où $P_F(x)$ la projection orthogonale de x sur F.

On a $P_F(x) = \langle x|\varepsilon_1\rangle \varepsilon_1 + \langle x|\varepsilon_2\rangle \varepsilon_2$, car $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une bon de F.

$$\begin{pmatrix} x = (1,1,1,1) \\ \varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0) \end{pmatrix} \Rightarrow \langle x|\varepsilon_1\rangle = \sqrt{2}$$

$$\begin{pmatrix} x = (1,1,1,1) \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,0,-1) \end{pmatrix} \Rightarrow \langle x|\varepsilon_2\rangle = -\sqrt{2}$$

On aura : $P_F(x) = (1,1,1,1) = x$

Avec $d(x,F) = \|x - P_F(x)\|$, on a enfin $\boxed{d(x,F) = 0}$ $\square$

Fin Exercice 2

Exercice 3

On considère l'application définie sur $M_n(\mathbb{R})^2$ par :

$$(A|B) = tr(^tA.B)$$

1) Montrer que cette application est un produit scalaire pour lequel la base canonique est orthonormée. On note $||.||$ la norme associée.

1)a) Il s'agit d'un produit scalaire ; en effet :

$\langle A|B\rangle = tr(^tA.B)$

i) $\langle .|.\rangle$ est symétrique ?

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.

$$\langle A|B\rangle = tr(^tA.B)$$
$$= tr(^t(^tA.B))$$
$$= tr(^tB.\,^t(^tA))$$
$$= tr(^tB.A)$$
$$= \langle B|A\rangle$$

ii) $\langle .|.\rangle$ est linéaire par rapport à la 1ère place ?

Soient $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

M. que $\langle \lambda A + B | C\rangle = \lambda \langle A|C\rangle + \langle B|C\rangle$

$\langle A|B\rangle = tr(^tA.B)$

$$\boxed{\langle A|B\rangle = tr({}^tA\cdot B)}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\langle \lambda A+B|C\rangle &= tr\left({}^t(\lambda A+B)\cdot C\right)\\
&= tr\left((\lambda\,{}^tA+{}^tB)C\right) \quad \text{(linéarité de la transposition)}\\
&= tr\left(\lambda\,{}^tA\cdot C+{}^tB\cdot C\right)\\
&= \lambda\, tr({}^tA\cdot C)+tr({}^tB\cdot C) \quad \text{(linéarité de la trace)}\\
&= \lambda\langle A|C\rangle+\langle B|C\rangle
\end{aligned}$$

iii) Soit $A\in M_n(\mathbb{R})$. M.que $\langle A|A\rangle \geqslant 0$.

$$\begin{aligned}
\langle A|A\rangle &= tr({}^tA\cdot A)\\
&= \sum_{i=1}^{n}({}^tA\cdot A)_{ii}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}({}^tA)_{ij}\,A_{ji}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}A_{ji}^2\right)\\
&= \sum_{1\leq i,j\leq n}A_{ji}^2 \geqslant 0
\end{aligned}$$

iv) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Supposons que $\langle A | A \rangle = 0$, et montrons que $A = 0$.

On a $\langle A | A \rangle = 0 \Rightarrow tr({}^tA . A) = 0$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} ({}^tA . A)_{ii} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} ({}^tA)_{ij} \ A_{ji} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} A_{ji}^2 \right) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{1 \leq i,j \leq n} A_{ji}^2 = 0$$

$$\Rightarrow \forall 1 \leq i,j \leq n, \ A_{ji}^2 = 0 \quad \left(\text{Somme nulle de nombres positifs} \right)$$

$$\Rightarrow \forall 1 \leq i,j \leq n, \ A_{ji} = 0$$

$$\Rightarrow A = 0$$

Conclusion :

$\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.

On considère l'application définie sur $M_n(\mathbb{R})^2$ par :

$$(A|B) = tr({}^tA.B)$$

1) Montrer que cette application est un produit scalaire pour lequel la base canonique est orthonormée. On note $||.||$ la norme associée.

1) b) Montrons que la base canonique (E_{ij}) de $M_n(\mathbb{R})$ est une base orthonormée pour ce produit scalaire :

Il s'agit de montrer que :

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ (E_{ij}|E_{ij}) = 1 \\ \forall (i,j) \neq (k,l),\ \text{alors } (E_{ij}|E_{kl}) = 0 \end{array}}$$

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. On a :

$$\begin{aligned} (E_{ij}|E_{ij}) &= tr({}^tE_{ij}.E_{ij}) \\ &= tr(E_{ji}E_{ij}) \quad \left({}^tE_{ij} \overset{\text{car}}{=} E_{ji}\right) \\ &= tr(\delta_{ii}.E_{jj}) \quad (\text{car } E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}) \\ &= tr(E_{jj}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Supposons que $(i,j) \neq (k,l)$. M.que $(E_{ij} | E_{kl}) = 0$

$$(E_{ij} | E_{kl}) = tr\left({}^t E_{ij} \cdot E_{kl}\right)$$

$$= tr(E_{ji} E_{kl}) \quad \left(\text{car } {}^t E_{ij} = E_{ji}\right)$$

$$= tr(\delta_{ik} E_{jl})$$

$$= \delta_{ik}\, tr(E_{jl}) \quad (\text{car } tr \text{ est linéaire})$$

$$= \delta_{ik} \cdot \delta_{jl} \quad (\text{car } tr(E_{jl}) = \delta_{jl} \text{ : à retenir !})$$

Et on a $(i,j) \neq (k,l) \Leftrightarrow (i \neq k \text{ ou } j \neq l)$

$$\Leftrightarrow \delta_{ik} = 0 \text{ ou } \delta_{jl} = 0$$

$$\Leftrightarrow \delta_{ik}\, \delta_{jl} = 0$$

D'où :

$$\boxed{(E_{ij} | E_{kl}) = 0}$$

$\square$

On considère l'application définie sur $M_n(\mathbb{R})^2$ par :

$$(A|B) = tr({}^tA.B)$$

1) Montrer que cette application est un produit scalaire pour lequel la base canonique est orthonormée. On note $||.||$ la norme associée.

2) Montrer que

$$\forall A \in M_n(\mathbb{R}), |tr(A)| \leq \sqrt{n}||A||$$

On appliquera l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

$$\langle x|y\rangle^2 \leq \langle x|x\rangle \langle y|y\rangle$$

càd

$$|\langle x|y\rangle| \leq ||x||.||y||$$

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On a :

$$|tr(A)| = |tr({}^tI_n.A)|$$

$$= |(I_n|A)|$$

$$\leq \underbrace{||I_n||}_{= \sqrt{(I_n|I_n)} = \sqrt{tr({}^tI_n.I_n)} = \sqrt{tr(I_n)} = \sqrt{n}}.||A||$$

inég-Cauchy Sch

D'où $\boxed{|tr(A)| \leq \sqrt{n}\,||A||}$

Fin Exercice 3

$\boxed{\textbf{Exercice 4}}$

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que $ker(A) = ker({}^tA.A)$

a) $ker(A) \subset ker({}^tA\,A)$?

Soit $X \in ker(A)$. M que $X \in Ker({}^tA\,A)$.

On a :

$X \in ker(A) \Rightarrow AX = 0$

$\Rightarrow {}^tA\,A\,X = 0$

$\Rightarrow X \in ker({}^tA\,A)$

D'où $ker(A) \subset ker({}^tA\,A)$

b) $ker({}^tA\,A) \subset ker(A)$?

Soit $X \in ker({}^tA\,A)$. M que $X \in ker(A)$.

On a ${}^tA\,A\,X = 0$ et on veut m que $AX = 0$.

Clé :

Dans $M_{n1}(\mathbb{R})$, si $X, Y \in M_{n1}(\mathbb{R})$, on a :

$$\langle X | Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i = {}^tX . Y$$

On a :

${}^tA\,A\,X = 0 \Rightarrow {}^tX\,{}^tA\,A\,X = 0$

$\Rightarrow {}^t(AX).(AX) = 0$

$\Rightarrow \|AX\|^2 = 0$

$\Rightarrow AX = 0$ $\square$

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que $ker(A) = ker({}^tA.A)$

2) En déduire que :

a) $rg(A) = rg({}^tA.A) = rg(A.{}^tA)$

2) a) i) $rg(A) = rg({}^tAA)$?

On a $ker(A) = ker({}^tAA)$

$\Rightarrow dim(ker(A)) = dim(ker({}^tAA))$

Et d'après le théorème du rang matriciel, on a :

$$n = dim(ker(A)) + rg(A)$$

$$n = dim(ker({}^tAA)) + rg({}^tAA)$$

D'où $rg(A) = rg({}^tAA)$ $\square$

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que $ker(A) = ker({}^tA.A)$

2) En déduire que :

a) $rg(A) = rg({}^tA.A) = rg(A.{}^tA)$?

2) a) ii) $rg(A) = rg(A.{}^tA)$?

On vient de montrer que $rg(A) = rg({}^tAA)$.

Alors, en appliquant à ${}^tA$ (à la place de A), on aura :

$$rg({}^tA) = rg({}^t({}^tA).{}^tA)$$

$\Rightarrow rg({}^tA) = rg(A \cdot {}^tA)$

Or $rg(A) = rg({}^tA)$

Alors $rg(A) = rg(A \cdot {}^tA)$ $\square$

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que $ker(A) = ker({}^tA.A)$

2) En déduire que :

a) $rg(A) = rg({}^tA.A) = rg(A.{}^tA)$

b) $Im(A) = Im(A.{}^tA)$

2) b) $Im(A) = Im(A.{}^tA)$?

On a déjà montré que $rg(A) = rg(A.{}^tA)$

C.à.d $\dim(Im(A)) = \dim(Im(A.{}^tA))$.

Alors pour montrer que $Im(A) = Im(A.{}^tA)$, il suffit d'établir une inclusion.

Montrons que $\boxed{Im(A.{}^tA) \subset Im(A)}$.

Soit $X \in M_{n1}(\mathbb{R})$, on a :

$$X \in Im(A.{}^tA) \Rightarrow \exists Y \in M_{n1}(\mathbb{R}),\ X = A.{}^tA\,Y$$

$$\Rightarrow X \in Im(A)$$

$\square$

Fin Exercice 4

Exercice 5

$E=\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire usuel. Q est le plan d'équation cartésienne

$$Q:\ x-y+z=0$$

1) Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.
Déterminer $P_Q(x,y,z)$; la projection orthogonale de (x,y,z) sur Q.

Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$P_Q(x,y,z)=\ ?$

Déterminons d'abord une base de Q.

On a :

$$\begin{aligned}(x,y,z)\in Q &\Leftrightarrow x-y+z=0\\ &\Leftrightarrow x=y-z\\ &\Leftrightarrow (x,y,z)=(y-z,y,z)\\ &\Leftrightarrow (x,y,z)=y(1,1,0)+z(-1,0,1)\\ &\Leftrightarrow (x,y,z)\in \text{vect}\big((1,1,0);(-1,0,1)\big)\end{aligned}$$

D'où $Q=\text{vect}\big((1,1,0);(-1,0,1)\big)$

$\big((1,1,0);(-1,0,1)\big)$ est donc une famille génératrice de Q.

Elle est libre, car ses deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

D'où $\big((1,1,0);(-1,0,1)\big)$ est une base de Q.

Déterminons maintenant $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que :

$$P_Q(x,y,z) = \alpha(1,1,0) + \beta(-1,0,1)$$

On a :

$$\Big((x,y,z) - P_Q(x,y,z)\Big) \in Q^{\perp} \Leftrightarrow \begin{cases} \Big((x,y,z) - P_Q(x,y,z) \,\Big|\, (1,1,0)\Big) = 0 \\ \Big((x,y,z) - P_Q(x,y,z) \,\Big|\, (-1,0,1)\Big) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Big((x,y,z) \,\Big|\, (1,1,0)\Big) = \Big(P_Q(x,y,z) \,\Big|\, (1,1,0)\Big) \\ \Big((x,y,z) \,\Big|\, (-1,0,1)\Big) = \Big(P_Q(x,y,z) \,\Big|\, (-1,0,1)\Big) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Big((x,y,z) \,\Big|\, (1,1,0)\Big) = \Big(\alpha(1,1,0) + \beta(-1,0,1) \,\Big|\, (1,1,0)\Big) \\ \Big((x,y,z) \,\Big|\, (-1,0,1)\Big) = \Big(\alpha(1,1,0) + \beta(-1,0,1) \,\Big|\, (-1,0,1)\Big) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \alpha \underbrace{\Big((1,1,0) \,\Big|\, (1,1,0)\Big)}_{=2} + \beta \underbrace{\Big((-1,0,1) \,\Big|\, (1,1,0)\Big)}_{=-1} \\ -x + z = \alpha \underbrace{\Big((1,1,0) \,\Big|\, (-1,0,1)\Big)}_{=-1} + \beta \underbrace{\Big((-1,0,1) \,\Big|\, (-1,0,1)\Big)}_{=2} \end{cases}$$

$$\Big((x,y,z)-P_Q(x,y,z)\Big)\in Q^{\perp} \iff \begin{cases} 2\alpha-\beta = x+y \\ -\alpha+2\beta = -x+z \end{cases}$$

Résolvons ce système d'inconnues α et β.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$\Delta_\alpha = \begin{vmatrix} x+y & -1 \\ -x+z & 2 \end{vmatrix} = x+2y+z$$

$$\Delta_\beta = \begin{vmatrix} 2 & x+y \\ -1 & -x+z \end{vmatrix} = -x+y+2z$$

$$\alpha = \frac{\Delta_\alpha}{\Delta} = \frac{1}{3}(x+2y+z) \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\Delta_\beta}{\Delta} = \frac{1}{3}(-x+y+2z)$$

On avait : $P_Q(x,y,z) = \alpha(1,1,0)+\beta(-1,0,1)$

$$\Rightarrow P_Q(x,y,z) = \frac{1}{3}(x+2y+z)(1,1,0)+\frac{1}{3}(-x+y+2z)(-1,0,1)$$

$$\boxed{P_Q(x,y,z) = \frac{1}{3}\left(2x+y-z,\ x+2y+z,\ -x+y+2z\right)}$$

$\square$

$E=\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire usuel. Q est le plan d'équation cartésienne

$$Q:\ x-y+z=0$$

1) Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.
   Déterminer $P_Q(x,y,z)$; la projection orthogonale de (x,y,z) sur Q.
2) Calculer $d(A,Q)$, où $A=(-1,2,1)$.

$$d(A,Q) = \|A - P_Q(A)\|$$

$A=(-1,2,1)$.

On a d'après 1°) que :

$$P_Q(x,y,z) = \frac{1}{3}\left(2x+y-z,\ x+2y+z,\ -x+y+2z\right)$$

$$\Rightarrow P_Q(A) = \frac{1}{3}(-1,4,5)$$

$$A - P_Q(A) = \ldots$$

$$d(A,Q) = \|A - P_Q(A)\| = \ldots$$

$$\boxed{d(A,Q) = \star}$$

□

Fin Exercice 5

Exercice 6

$(E, <\cdot|\cdot>)$ un espace euclidien.

1) a un vecteur non nul de E et $D = vect(a)$.
Expliciter $P_D(x)$, la projection orthogonale de x sur D.

$D = vect(a)$; où $a \neq 0$.

(a) est une base de D.

$\left(\frac{a}{\|a\|}\right)$ est donc une base orthonormée de D.

Alors pour tout $x \in E$, on a :

$$P_D(x) = \left\langle x \,\middle|\, \frac{a}{\|a\|} \right\rangle \cdot \frac{a}{\|a\|}$$

$$= \frac{1}{\|a\|^2} \langle x | a \rangle\, a$$

Enfin : $\boxed{P_D(x) = \frac{\langle x | a \rangle}{\langle a | a \rangle}\, a \ ; \text{ où } D = Vect(a).}$

□

$(E, < \cdot | \cdot >)$ un espace euclidien.

1) a un vecteur non nul de E et $D = vect(a)$.
   Expliciter $P_D(x)$, la projection orthogonale de x sur D.

2) Soit H l'hyperplan orthogonal au vecteur ; c-à-d $H = (vect(a))^{\perp}$
   Expliciter $P_H(x)$.

On a $H = (vect(a))^{\perp}$

Soit $x \in E$, $P_H(x) = ?$

On a $E = \underbrace{vect(a)}_{=D} \oplus \underbrace{(vect(a))^{\perp}}_{=H}$

Alors $P_D(x) + P_H(x) = x$

Or $P_D(x) = \dfrac{\langle x | a \rangle}{\langle a | a \rangle} a$

Alors $\boxed{P_H(x) = x - \dfrac{\langle x | a \rangle}{\langle a | a \rangle} a}$ □

$(E, <\cdot|\cdot>)$ un espace euclidien.

1) a un vecteur non nul de E et $D = vect(a)$.
Expliciter $P_D(x)$, la projection orthogonale de x sur D.

2) Soit H l'hyperplan orthogonal au vecteur ; c-à-d $H = (vect(a))^\perp$
Expliciter $P_H(x)$.

3) $E = \mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire usuel.
Q est le plan d'équation cartésienne

$$Q : \ x - y + z = 0$$

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
Déterminer $P_Q(x, y, z)$; la projection orthogonale de (x, y, z) sur Q.
Comparer avec le résultat trouvé dans : Exercice 5. 1).

$$(x,y,z) \in Q \iff x - y + z = 0$$

$$\iff \langle (x,y,z) | (1,-1,1) \rangle = 0$$

$$\iff (x,y,z) \in \left(vect\left((1,-1,1)\right)\right)^\perp$$

D'où : $Q = \left(vect\left((1,-1,1)\right)\right)^\perp$; est l'hyperplan orthogonal au vecteur $(1,-1,1)$.

$$\boxed{P_H(x) = x - \frac{\langle x | a \rangle}{\langle a | a \rangle} a}$$

$$P_Q(x,y,z) = (x,y,z) - \frac{\langle (x,y,z) | (1,-1,1) \rangle}{\langle (1,-1,1) | (1,-1,1) \rangle} \cdot (1,-1,1)$$

$$= (x,y,z) - \frac{x-y+z}{3} \cdot (1,-1,1)$$

$$\boxed{P_Q(x,y,z) = \frac{1}{3}\left(2x+y-z,\ x+2y+z,\ -x+y+2z\right)}$$

Et ça coïncide avec le résultat trouvé dans l'exercice 5, 1°)

Fin Exercice 6

Exercice 7

$M_2(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire : $(A|B) = tr({}^tA.B)$

$H = \{M \in M_2(\mathbb{R}) / tr(M) = 0\}$. $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} / (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

1) a) Justifier que H est un hyperplan de $M_2(\mathbb{R})$

$H = \{M \in M_2(\mathbb{R}) / tr(M) = 0\}$

$H = \ker(Tr)$

Tr est une forme linéaire de $M_2(\mathbb{R})$.

$Tr \neq 0$ car $Tr(I_2) = 2 \neq 0$

Ainsi, H est un hyperplan de $M_2(\mathbb{R})$, comme noyau d'une forme linéaire non nulle.

$\square$

$M_2(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire : $(A|B) = tr({}^tA.B)$

$H = \{M \in M_2(\mathbb{R}) / tr(M) = 0\}$. $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} / (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

1) a) Justifier que H est un hyperplan de $M_2(\mathbb{R})$

b) Déterminer $d(A, H)$.

$d(A,H) = \|A - P_H(A)\|$; $P_H(A) = ?$

Écrivons $A = \underbrace{?}_{\in H} + \underbrace{?}_{\in H^\perp}$, pour tirer $P_H(A)$.

On a $M \in H \Leftrightarrow tr(M) = 0$

$\Leftrightarrow tr({}^tI_2 . M) = 0$

$\Leftrightarrow (I_2 | M) = 0$

$\Leftrightarrow M \in (\text{vect}(I_2))^\perp$

D'où $H = (\text{vect}(I_2))^\perp$

Et donc $H^\perp = \text{Vect}(I_2)$

On a $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= I_2 \in \text{Vect}(I_2) = H^\perp} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\in \ker(tr) = H}$$

D'où $P_H(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$d(A,H) = \|A - P_H(A)\|$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\|$$

$$= \|I_2\|$$

$$= \sqrt{tr({}^tI_2 . I_2)}$$

$$\boxed{d(A,H) = \sqrt{2}}$$

$\square$

$M_2(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire : $(A|B) = tr({}^tA.B)$

$H = \{M \in M_2(\mathbb{R}) / tr(M) = 0\}$. $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} / (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

1) a) Justifier que H est un hyperplan de $M_2(\mathbb{R})$

   b) Déterminer $d(A, H)$.

2) a) Justifier que F est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$ et en déterminer une base.

$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} / a, b \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} / a, b \in \mathbb{R} \right\}$

$F = \mathrm{Vect}(I_2, J)$; où $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

D'où F est un sev de $M_2(\mathbb{R})$, (I_2, J) en est une famille génératrice.

(I_2, J) est libre, car I_2 et J ne sont pas colinéaires.

D'où (I_2, J) est une base de F ; où $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

$\square$

$M_2(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire : $(A|B) = tr({}^tA.B)$

$H = \{M \in M_2(\mathbb{R}) / tr(M) = 0\}$. $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} / (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

1) a) Justifier que H est un hyperplan de $M_2(\mathbb{R})$

b) Déterminer $d(A, H)$.

2) a) Justifier que F est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$ et en déterminer une base.

b) Déterminer une base de $F^\perp$

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

$M \in F^\perp \iff \begin{cases} (M|I_2) = 0 \\ (M|J) = 0 \end{cases}$, car (I_2, J) base de F

$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\iff \begin{cases} a + d = 0 \\ b - c = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} a = -d \\ b = c \end{cases}$

$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\iff M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$

$\iff M = a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{noté } K} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{noté } L}$

$M \in F^\perp \iff M \in Vect(K, L)$

D'où $F^\perp = Vect(K, L)$; où $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(K, L) est bien une base de $F^\perp$. □

$M_2(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire : $(A|B) = tr({}^tA.B)$

$H = \{M \in M_2(\mathbb{R}) / tr(M) = 0\}$. $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} / (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

1) a) Justifier que H est un hyperplan de $M_2(\mathbb{R})$

b) Déterminer $d(A, H)$.

2) a) Justifier que F est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$ et en déterminer une base.

b) Déterminer une base de $F^\perp$

c) Déterminer la projection orthogonale de A sur $F^\perp$

$\boxed{P_{F^\perp}(A) = ?}$

Plusieurs manières de procéder, voyons par exemple:

Déterminons $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $P_{F^\perp}(A) = \alpha K + \beta L$

(K, L) est bien une base de $F^\perp$, où $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On a :

$$\left(A - P_{F^\perp}(A)\right) \in (F^\perp)^\perp \iff \begin{cases} (A - P_{F^\perp}(A) | K) = 0 \\ (A - P_{F^\perp}(A) | L) = 0 \end{cases}$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\iff \begin{cases} \overbrace{(A|K)}^{=0} = (P_{F^\perp}(A) | K) \\ \underbrace{(A|L)}_{=2} = (P_{F^\perp}(A) | L) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 0 = \alpha \underbrace{(K|K)}_{=2} + \beta \underbrace{(L|K)}_{=0} \\ 2 = \alpha \underbrace{(K|L)}_{=0} + \beta \underbrace{(L|L)}_{=2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha = 0 \\ 2\beta = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

$P_{F^\perp}(A) = \alpha K + \beta L$ devient enfin

$$\boxed{P_{F^\perp}(A) = L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

$\triangleleft$

Fin Exercice 7