EXRAIT DU CONCOURS : Petites Mines ; Année 2009

Problème: Analyse

Dans tout ce problème, on notera sh la fonction sinus hyperbolique, ch la fonction cosinus hyperbolique et th la fonction tangente hyperbolique.

A. Etude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x \,\mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1. Etudier la parité de f.

2. **(a)** Rappeler un équivalent de la fonction sh en 0 et en déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

(b) Déterminer la limite de f en 0.

3. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = \left[\mathrm{th}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right] \times \mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right).$$

4. Montrer que, pour tout $X \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathrm{th}(X) < X$.

5. En déduire le tableau de variations de f.

6. Donner le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $X \longmapsto \dfrac{\mathrm{sh}(X)}{X}$.

7. En déduire qu'au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$, f admet un développement de la forme

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \frac{a_4}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right),$$

où $a_0, \ldots, a_4$ sont cinq réels que l'on précisera.

8. Montrer que la fonction $x \in \mathbb{R}^* \longmapsto f\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathbb{R}$ se prolonge sur $\mathbb{R}$ en une fonction continue notée F, puis prouver que F est dérivable sur $\mathbb{R}$.

B. Tracé d'une courbe paramétrée

On s'intéresse à l'arc paramétré défini pour $t \neq 0$ par les équations

$$\begin{cases} x(t) = t\,\mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{t}\right) \\ y(t) = t\exp\left(\dfrac{1}{t}\right) \end{cases}.$$

On note Γ son support. On donne la valeur approchée $\mathrm{sh}(1) \approx 1,18$ à 10^{-2} près.

9. Dresser le tableau des variations des fonctions x et y sur $\mathbb{R}^*$, en précisant les limites.

10. Déterminer les asymptotes de Γ et préciser la position de Γ par rapport à chacune de ses asymptotes. *On résumera l'étude à l'aide de schémas.*

11. Tracer l'allure de Γ, ainsi que ses asymptotes et la tangente à Γ au point M de paramètre $t = 1$. On prendra 2 cm comme unité en abscisses et en ordonnées.

C. Une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) suivante, que l'on va résoudre sur différents intervalles

$$xy' + y = \operatorname{ch}(x). \qquad (E)$$

12. Résoudre sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle (E).

13. Donner sans justification les solutions de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $\mathbb{R}_-^*$.

14. Justifier que la fonction F (définie dans la question A.8.) est l'unique fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ qui soit solution de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$.

Fin énoncé